



# Estimación de probabilidades representativas del mundo real: importancia de los sesgos conductuales

Ricardo Crisóstomo

Documento de Trabajo  
N.º 73



---

# Estimación de probabilidades representativas del mundo real: importancia de los sesgos conductuales

Ricardo Crisóstomo<sup>1</sup>

## Resumen

Este artículo muestra cómo separar los sesgos de sentimiento de las expectativas racionales mejora significativamente la consistencia y precisión de las estimaciones probabilísticas. Utilizando datos desde 1994 a 2017, analizamos 15 modelos estocásticos con diferentes preferencias de riesgo y, en todos los casos, se observa que nuestro ajuste de sentimiento mejora sustancialmente la capacidad de predicción de los modelos tradicionales. Nuestros resultados son robustos ante diferentes métodos de evaluación, hipótesis de preferencia de riesgo y calibraciones de sentimiento, demostrando que los ajustes de sentimiento se pueden utilizar de manera eficaz para pronosticar la evolución del precio de los activos. Nuestros análisis adicionales confirman que las funciones de densidad representativas del mundo real generan mejoras respecto a densidades recalibradas conforme a errores pasados e incrementan la capacidad predictiva de los modelos en los que la aversión al riesgo se estima de forma dinámica a partir de los precios de las opciones.

*Palabras clave:* Sentimiento, pronósticos de densidad, *kernel* de precios, datos de opciones, finanzas conductuales.

*Clasificación JEL:* C14, C52, C53, G12, G13.

## Documento de Trabajo

N.º 73

26 de noviembre de 2020

---

1 Autor para correspondencia. Comisión Nacional del Mercado de Valores (CNMV), Edison 4, 28006 Madrid, España, y Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), Bravo Murillo 38, Madrid, España. Correo electrónico: rcayala@cnmv.es. El autor agradece los útiles comentarios de Javier Ojea.

La Comisión Nacional del Mercado de Valores publica este Documento de Trabajo con el objetivo de facilitar la difusión de estudios que contribuyan al mejor conocimiento de los mercados de valores y su regulación.

Las opiniones expresadas en este Documento de Trabajo reflejan exclusivamente el criterio de los autores y no deben ser atribuidas a la Comisión Nacional del Mercado de Valores.

Esta publicación, como la mayoría de las elaboradas por la Comisión Nacional del Mercado de Valores, está disponible en el sitio web [www.cnmv.es](http://www.cnmv.es).

© CNMV. Se autoriza la reproducción de los contenidos de esta publicación siempre que se mencione su procedencia.

ISSN (edición electrónica): 1988-2025

Edición y maquetación: Cálamo y Cran

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Estimación de densidades del mundo real</b>	<b>11</b>
2.1	Densidades neutrales al riesgo	11
2.2	Densidades ajustadas al riesgo	13
2.3	Densidades del mundo real	14
2.4	Ejemplo práctico	16
<b>3</b>	<b>Medición de los efectos del sentimiento</b>	<b>19</b>
3.1	Optimismo de los inversores	19
3.2	Exceso de confianza	20
3.3	Sentimiento de cola	21
<b>4</b>	<b>Datos y calibración</b>	<b>23</b>
4.1	Datos de opciones	23
4.2	Tipos de interés y dividendos	24
4.3	Datos de sentimiento	24
4.4	Calibración de densidades tradicionales	25
<b>5</b>	<b>Evaluación de pronósticos</b>	<b>27</b>
5.1	Puntuación logarítmica	27
5.2	Puntuación de rango de probabilidad continuo	27
5.3	Pruebas de bondad de ajuste	28
5.4	Puntuación de pronóstico integrado	29
<b>6</b>	<b>Resultados empíricos</b>	<b>31</b>
6.1	Ajustes de sentimiento	31
6.2	Puntuación de pronóstico integrado	33
6.3	Comparaciones de probabilidad logarítmica	35
6.4	Comparaciones de CRPS	36
6.5	Consistencia estadística	37
6.6	Análisis de robustez	38
<b>7</b>	<b>Conclusión</b>	<b>43</b>
<b>8</b>	<b>Referencias</b>	<b>45</b>



# 1 Introducción

Los modelos de fijación de precios de los activos han evolucionado bajo los paradigmas de eficiencia del mercado y expectativas racionales. Sin embargo, desde los trabajos pioneros de Keynes (1936), cada vez hay más pruebas de que los inversores cometen errores de comportamiento sistemáticos que se manifiestan a través de los precios de los activos<sup>1</sup>.

Contribuimos a la literatura mediante el desarrollo de un marco prospectivo para medir el sentimiento de los inversores y cuantificar sus efectos. Metodológicamente, partimos de las distribuciones neutras al riesgo obtenidas a partir de las referencias más comunes en economía financiera, incluidos los modelos de volatilidad estocástica, saltos discontinuos y densidades no paramétricas. Todas las predicciones neutras al riesgo se ajustan para incorporar las preferencias de riesgo de los inversores a través de varias fórmulas de utilidad.

A continuación, estimamos la función de sentimiento que resume los sesgos de los inversores en áreas específicas de la distribución del rendimiento. De acuerdo con Cochrane (2005) y Shefrin (2008), analizamos el impacto de los sesgos de comportamiento a través del factor de descuento estocástico (SDF, por sus siglas en inglés). El SDF o *kernel* de precios es la piedra angular de la fijación de precios de los activos e incorpora las preferencias y creencias de los inversores sobre los rendimientos futuros. En las finanzas tradicionales, el SDF debe ser monótonamente decreciente para reflejar la utilidad marginal decreciente en términos de riqueza. Sin embargo, los análisis empíricos muestran que el SDF presenta, en contra de lo esperado, una parte de pendiente ascendente, lo que da lugar al rompecabezas del *kernel* de precios (véanse Ait-Sahalia y Lo, 2000; Jackwerth, 2000; y Rosenberg y Engle, 2002<sup>2</sup>).

Cuando el SDF se expande para incorporar efectos de sentimiento, el *kernel* de precios abarca en conjunto el descuento de tiempo, las preferencias de riesgo y los sesgos de comportamiento. Si bien los dos primeros son ampliamente conocidos en el ámbito financiero, el componente de comportamiento del SDF representa el cambio de medida necesario para incorporar el sentimiento de los inversores en diferentes áreas del pronóstico probabilístico. De acuerdo con Barone-Adesi *et al.* (2017), planteamos tres posibles errores inducidos por el sentimiento: optimismo excesivo, que genera sesgos en los rendimientos promedios; exceso de confianza, que afecta a las predicciones sobre volatilidad, y sentimiento de cola, que está relacionado con expectativas de cola no racionales.

---

1 Véanse, entre otros: De Long *et al.* (1990), Bollen y Whaley (2004), Constantinides *et al.* (2009), Baker y Wurgler (2007), Baker y Wurgler (2006), Han (2008), Yan (2010), Stambaugh *et al.* (2012) y Da *et al.* (2015).

2 Para conocer un estudio completo del rompecabezas del *kernel* de precios, véase Cuesdeanu y Jackwerth (2018).

Calibramos nuestra función de sentimiento utilizando datos simples basados en el mercado. El optimismo de los inversores se deriva de cambios en las volatilidades implícitas: el exceso de confianza se mide por aproximación mediante cambios en los volúmenes de negociación y el sentimiento de cola se obtiene de la asimetría en la distribución neutral al riesgo. Todos los sesgos de los inversores se agregan después en una función de sentimiento *ex ante* que se utiliza para transformar los pronósticos ajustados al riesgo en densidades del mundo real. Para medir el impacto de los efectos del sentimiento, consideramos dos calibraciones alternativas: una especificación de bajo impacto y otra de alto impacto.

A continuación, examinamos el resultado fuera de la muestra de todos los pronósticos de densidad. La precisión de cada modelo se analiza mediante la puntuación de probabilidad logarítmica, los errores de pronóstico se evalúan en términos de la puntuación de rango de probabilidad continuo (CRPS, por sus siglas en inglés) y la consistencia estadística se mide con las pruebas de Berkowitz, Jarque-Bera y Kolmogorov-Smirnov. Finalmente, resumimos todas las métricas de pronóstico en una única clasificación utilizando la puntuación de pronóstico integrado (IFS, por sus siglas en inglés).

Nuestros resultados son sorprendentes. Analizamos 15 modelos estocásticos y combinaciones de preferencias de riesgo y, en todos los casos posibles, una simple corrección de comportamiento genera ganancias de pronóstico sustanciales. En particular, la mejora generada por nuestra transformación del mundo real es robusta en todos los métodos de evaluación, hipótesis de preferencia de riesgo y calibraciones de sentimiento, lo que demuestra que los efectos de sentimiento pueden utilizarse de manera efectiva para pronosticar precios futuros.

También realizamos dos pruebas adicionales. Primero, demostramos que nuestras densidades del mundo real superan los pronósticos no paramétricos que han sido recalibrados para evitar errores pasados. En segundo lugar, mostramos que las correcciones de comportamiento también mejoran el poder explicativo de las predicciones de densidad en las que la aversión al riesgo se estima dinámicamente a partir de los precios de las opciones.

## **Novedad e investigación relacionada**

En comparación con la literatura existente, la novedad de nuestro enfoque es cuádruple:

- i) El método tradicional para calcular el SDF compara un pronóstico retrospectivo con una densidad neutral al riesgo (RND, por sus siglas en inglés) prospectiva, cuestionando si el rompecabezas del *kernel* de precios podría deberse a expectativas desalineadas<sup>3</sup>. Si bien varios artículos abordan este desajuste de información<sup>4</sup>, somos los primeros en estimar el *kernel* de precios en el mundo

---

3 Véanse Brown y Jackwerth (2012), Beare y Schmidt (2016), Beare (2011), Carr y Wu (2003), Grith, Härdle, y Krätschmer (2017) y Yatchew y Härdle (2006).

4 Véanse Linn *et al.* (2018), Cuesdeanu y Jackwerth (2018) y Sala *et al.* (2016).



real, incluidas las preferencias de riesgo y los efectos de comportamiento, en un marco prospectivo consistente.

- ii) Estudios anteriores atribuyen indirectamente al sentimiento todas las desviaciones entre un *kernel* tradicional y el SDF empírico. Este enfoque, aunque directo, no considera si tales diferencias son causadas por sentimientos u otras especificaciones erróneas del modelo. Alternativamente, desarrollamos un método de estimación directa que genera el SDF conductual utilizando datos simples basados en el mercado.
- iii) Los efectos del sentimiento se analizan normalmente en un marco de media-varianza. No obstante, es bien sabido que tanto la rentabilidad de los activos como las creencias de los inversores presentan características anormales. A fin de examinar de forma exhaustiva cómo se manifiesta el sentimiento en las predicciones de densidad, consideramos el impacto de los sesgos de los inversores en toda la distribución del pronóstico, incorporando características no gaussianas: i) en el nivel de estimación de RND, ii) en el cálculo del SDF conductual y iii) en el marco de evaluación de densidad.
- iv) Aunque varios investigadores estudian cómo mejorar la capacidad de pronóstico de las RND, los ajustes propuestos generalmente se calibran dentro de la muestra<sup>5</sup>. Por el contrario, nuestras estimaciones de comportamiento se obtienen siempre fuera de la muestra, respetando las condiciones del mundo real al utilizar solo la información conocida por los inversores en cada fecha de pronóstico.

---

5 Véanse Bliss y Panigirtzoglou (2004), Liu *et al.* (2007), Kang y Kim (2006) y Alonso *et al.* (2009).



## 2 Estimación de densidades del mundo real

Estimamos las probabilidades del mundo real mediante un proceso en 3 fases. Primero, comenzamos con las RND obtenidas de una muestra transversal de los precios de las opciones. A continuación, las distribuciones neutrales al riesgo se ajustan para incorporar las preferencias de riesgo de los inversores a través de varias fórmulas de utilidad. Finalmente, desarrollamos un marco prospectivo para medir el sentimiento de los inversores y cuantificar sus efectos.

Cada vez más publicaciones muestran que las distribuciones implícitas en las opciones, incluso sin ajustes de riesgo, superan a los pronósticos históricos en contenido informativo<sup>6</sup>. Partiendo de esta idea, examinamos si la capacidad predictiva de las RND se puede mejorar aún más teniendo en cuenta dos atributos de los inversores del mundo real que se manifiestan en los precios de los activos:

- **Preferencias de riesgo:** Distintos artículos empíricos demuestran que cuando las RND se ajustan para incluir las preferencias de riesgo de los inversores, su poder explicativo aumenta<sup>7</sup>.
- **Sesgos de comportamiento:** Los precios de las opciones reflejan puntos de vista personalizados sobre áreas específicas de la distribución de rendimientos, por lo que son propensos a atraer operaciones sentimentales. Si aceptamos que las opciones se ven afectadas por el sentimiento, se deduce que los pronósticos implícitos en las opciones deben ajustarse adecuadamente para separar los sesgos de los inversores de las expectativas fundamentales.

### 2.1 Densidades neutrales al riesgo

Partimos de los pronósticos neutrales al riesgo obtenidos a partir de las referencias más habituales en finanzas. Nuestra primera densidad se obtiene del modelo lognormal de Black-Scholes-Merton (LN). En segundo lugar, consideramos la dinámica de volatilidad estocástica de Heston (1993):

$$dF_t = \sqrt{V_t} F_t dW_{t,1} \quad (1)$$

$$dV_t = a(\bar{V} - V_t)dt + \eta\sqrt{V_t}dW_{t,2} \quad (2)$$

---

6 Véanse los estudios exhaustivos de Christoffersen *et al.* (2013) y Poon y Granger (2003) o, más recientemente, de Barone-Adesi *et al.* (2018) y Crisóstomo y Couso (2018). Figlewski (2018) presenta una revisión sobre el uso de RND.

7 Véanse, entre otros, Bliss y Panigirtzoglou (2004), Shackleton *et al.* (2010), Kostakis *et al.* (2011), Høg y Tsiaras (2011) y DeMiguel *et al.* (2013).

donde  $F_t$  es el precio a plazo en la fecha  $t$ ,  $V_t$  y  $\bar{V}$  representan respectivamente la varianza instantánea y a largo plazo,  $a$  es la velocidad de reversión a la media de la varianza,  $\eta$  es la volatilidad del proceso de varianza y  $dW_{t,1}$  y  $dW_{t,2}$  son dos procesos de Wiener correlacionados. A continuación, complementamos la volatilidad estocástica de Heston en (2) con saltos discontinuos, obteniendo el modelo de Bates (1996):

$$dF_t = \sqrt{V_t} F_t dW_t^{(1)} + J_t F_t dN_t - \lambda \mu_J F_t dt \quad (3)$$

donde  $N_t$  es un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda$  y  $J_t$  son saltos lognormales con media  $\mu_J$  y desviación típica  $v_J$ . En cuarto lugar, consideramos el proceso de varianza gamma (VG) (Madan, Carr y Chang, 1998), que combina saltos de precios pequeños y grandes a través de la dinámica:

$$\begin{aligned} F_T &= F_t e^{\lambda \tau + H(\tau; \sigma, v, \theta)} \\ \lambda &= \frac{1}{v} \ln \left( 1 - \theta v - \frac{\sigma^2 v}{2} \right) \\ H(\tau; \sigma, v, \theta) &= \theta G(\tau; v) + \sigma G(\tau; v) W_t \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $G(\tau; v)$  es una distribución Gamma;  $\sigma$ ,  $v$  y  $\theta$  controlan la volatilidad, asimetría y curtosis de la distribución, y  $\tau$  representa el tiempo entre la fecha de observación  $t$  y el horizonte de pronóstico  $T$ .

Las distribuciones neutrales al riesgo para todos los procesos estocásticos se obtienen mediante la inversión de sus funciones características. Heston (1993) y Bakshi y Madan (2000) demuestran que la función de distribución acumulada (CDF, por sus siglas en inglés) de un proceso estocástico  $F_T$  se puede obtener como:

$$CDF_{F_T}(k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-iw \ln(k)} \Psi_{\ln F_T}(w)}{iw} \right] dw \quad (5)$$

donde  $\Psi_{\ln F_T}(w)$  denota la función característica de  $\ln(F_T)$ ,  $\operatorname{Re}[\cdot]$  es el operador real y  $k$  son los precios de ejercicio<sup>8</sup>.

Por último, empleamos la aplicación de Malz (2014) de la fórmula de Breeden-Litzenberger (1978) (BLMALZ). El enfoque de Malz genera una función de volatilidad implícita utilizando interpolaciones con *splines* cúbicos en todas las volatilidades implícitas disponibles y una extrapolación plana en los extremos. Para cada fecha de pronóstico, la función de volatilidad implícita se emplea para calcular un continuo de precios de las opciones de compra  $C(k, \tau)$ , que se diferencia numéricamente para obtener la CDF que replica los precios de las opciones:

$$CDF_{F_T}(k) \approx 1 + e^{r\tau} \frac{1}{\Delta} \left[ C\left(k - \frac{\Delta}{2}, \tau\right) - C\left(k + \frac{\Delta}{2}, \tau\right) \right] \quad (6)$$

donde  $\Delta$  denota el tamaño de paso para la diferenciación finita.

---

<sup>8</sup> Véase Crisóstomo (2014, 2017) para más detalles.

## 2.2 Densidades ajustadas al riesgo

A continuación, examinamos cómo se pueden ajustar las RND para incorporar las preferencias de riesgo de los inversores. De acuerdo con Cochrane (2005), el valor actual de cualquier activo  $P_t$  se puede calcular como la expectativa de flujos de efectivo futuros, minorados por el SDF.

$$P_t = E_t \left[ m_T z_T \right] \quad (7)$$

donde  $E_t$  es la expectativa según la medida representativa del inversor,  $z_T$  son los pagos que dependen del estado y  $m_T$  es el *kernel* de precios que resume las preferencias y creencias de los inversores. Expresada en forma integral, la ecuación de fijación de precios se convierte en:

$$P_t = \int_{\mathbb{R}} m_t(x_T) z_T(x_T) f_t(x_T) dx_T \quad (8)$$

donde  $f_t(x_T)$  representa la función de densidad de probabilidad de los precios futuros de los activos  $x_T$ . Con todo, dado que  $f_t$  aún no incluye el impacto de las preferencias de los inversores, que están integradas en  $m_T$ , estas probabilidades no pueden considerarse representativas de las expectativas de los inversores sobre los precios futuros.

En un mundo neutral al riesgo, las preferencias de los inversores reflejan únicamente el descuento del tiempo. Por lo tanto, el *kernel* de precios es simplemente  $m_T^{\mathbb{Q}} = e^{-r\tau}$  y, al sustituir en (8), el valor de cualquier activo se convierte en:

$$P_t = e^{-r\tau} \int_{\mathbb{R}} z_T(x_T) f_t^{\mathbb{Q}}(x_T) dx_T \quad (9)$$

donde  $f_t^{\mathbb{Q}}(x_T)$  representa la función de densidad neutral al riesgo calculada en  $t$  y con horizonte de pronóstico  $T$ . Ya que  $m_T^{\mathbb{Q}}$  contiene solo el factor de descuento, que no varía entre los estados de riqueza, el SDF neutral al riesgo no modifica las probabilidades genéricas en (8) y, por lo tanto,  $f_t^{\mathbb{Q}} \equiv f_t$ .

En cambio, en una economía ajustada al riesgo, los inversores racionales muestran aversión al riesgo, atribuyendo una utilidad marginal decreciente a los pagos recibidos en estados de mayor riqueza. Liu *et al.* (2007) demuestran que el *kernel* de precios para los inversores con aversión al riesgo es proporcional a su utilidad marginal y está dado por  $m_T^{RA} = e^{-r\tau} u'(x_T)$ . Por consiguiente, la ecuación de fijación de precios se convierte en:

$$P_t = e^{-r\tau} \int_{\mathbb{R}} z_T(x_T) f_t^{RA}(x_T) u'(x_T) dx_T \quad (10)$$

Al comparar (9) y (10), se deduce que para que las economías neutrales al riesgo y ajustadas al riesgo generen el mismo precio de mercado, la densidad ajustada al riesgo  $f_t^{RA}$  debe ser igual a  $f_t^{\mathbb{Q}}/u'$ . Sin embargo, Bliss y Panigirtzoglou (2004) apuntan que la transformación de probabilidades neutrales al riesgo a probabilidades ajustadas al riesgo presenta no linealidades y, por lo tanto, debe emplearse el factor de escala  $\int_0^{\infty} f_t^{\mathbb{Q}}(y)/u'(y) dy$  para asegurar la integración a la unidad. En

consecuencia, a partir de cualquier RND, las probabilidades ajustadas al riesgo se pueden obtener como:

$$f_t^{RA}(x_T) = \frac{f_t^{\mathbb{Q}}(x_T) / u'(x_T)}{\int_0^{\infty} f_t^{\mathbb{Q}}(y) / u'(y) dy} \quad (11)$$

En particular, para los inversores que presentan una utilidad de potencia con aversión al riesgo relativa constante (CRRA, por sus siglas en inglés),

$$u^{CRRA}(x_T) = \begin{cases} \frac{1}{1-\gamma} x_T^{1-\gamma} & \text{si } \gamma \geq 0; \gamma \neq 1 \\ \ln x_T & \text{si } \gamma = 1 \end{cases} \quad (12)$$

donde  $\gamma$  denota el coeficiente de aversión al riesgo relativa. La utilidad CRRA marginal es entonces  $u' = x_T^{-\gamma}$  y el *kernel* de precios pasa a ser  $m_T^{CRRA} = e^{-r\tau} x_T^{-\gamma}$ . Por tanto, la densidad ajustada al riesgo  $f_t^{CRRA}$  es:

$$f_t^{CRRA}(x_T) = \frac{x_T^{\gamma} f_t^{\mathbb{Q}}(x_T)}{\int_0^{\infty} y^{\gamma} f_t^{\mathbb{Q}}(y) dy} \quad (13)$$

Además, cuando  $\gamma = 0$ , el *kernel* de precios de CRRA es  $m_T^{CRRA} = e^{-r\tau}$  y, por tanto, la herramienta CRRA contiene como caso especial una economía en la que los inversores son neutrales al riesgo.

## 2.3 Densidades del mundo real

A continuación, nos planteamos cómo incorporar el sentimiento de los inversores en el marco del SDF. Con vistas a examinar de manera integral el impacto de los efectos del comportamiento en diferentes áreas de la distribución de los rendimientos, agregamos tres errores inducidos por el sentimiento: optimismo excesivo, que se relaciona con sesgos en los rendimientos promedios; exceso de confianza, que conduce a errores en las predicciones sobre volatilidad, y sentimiento de cola, que está vinculado a expectativas de cola no racionales.

### 2.3.1 Optimismo y exceso de confianza de los inversores

Para cualquier pronóstico de densidad  $f_t(x_T)$ , la transformación del comportamiento debida al optimismo y al exceso de confianza de los inversores se puede obtener mediante una correspondencia lineal de los valores originales  $x_T$  con los valores ajustados  $\hat{x}_T$

$$\hat{x}_T = \theta_{1,t} + \hat{x}_T \theta_{2,t} + (1 - \theta_{2,t}) \mu_{x_T} \quad (14)$$

donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  indican, respectivamente, la ubicación y los parámetros de cambio de escala. Esta transformación cambia la media y la desviación típica del pronóstico

tradicional a los valores ajustados  $\hat{\mu} = \mu + \theta_1$  y  $\hat{\sigma} = \sigma \theta_2$ , proporcionando una forma flexible de ajustar las predicciones de densidad<sup>9</sup>.

Cuando los precios de mercado se ven determinados por inversores pesimistas, las densidades basadas en el mercado reflejan un sesgo a la baja en los rendimientos promedios; por ello, realizamos un ajuste de comportamiento  $\theta_1 > 0$  que cambia la masa de probabilidad hacia resultados más favorables. Por el contrario, cuando los precios se rigen por inversores optimistas, los pronósticos tradicionales se corrigen mediante un cambio de comportamiento  $\theta_1 < 0$  que desplaza la distribución implícita en el mercado hacia la izquierda, reduciendo la media.

De manera similar, cuando los precios están motivados por inversores con poca confianza, los pronósticos implícitos en el mercado incluyen una dispersión excesiva y, por lo tanto, una corrección de comportamiento  $\theta_2 < 1$  reduce la volatilidad de la distribución. Por el contrario, si los precios vienen determinados por inversores con un exceso de confianza, un ajuste  $\theta_2 > 1$  aumenta la volatilidad del pronóstico implícito en el mercado.

Después de la transformación del comportamiento, el *kernel* de precios de media-varianza (mv)  $m_T^{mv}$  se obtiene como:

$$m_T^{mv} = \frac{f_t^{RA}(x_T)}{f_t^{mv}(x_T)} \quad (15)$$

donde  $f_t^{RA}(x_T)$  representa la densidad ajustada al riesgo y  $f_t^{mv}(x_T)$  es la distribución conductual obtenida mediante el desplazamiento media-varianza.

### 2.3.2 Sentimiento de cola

Para tener en cuenta los sesgos en las expectativas de cola, empleamos un ajuste simple que desplaza progresivamente la masa de probabilidad de la cola izquierda a la derecha, o viceversa. Si denominamos  $q(\alpha)$  y  $q(1-\alpha)$  a los cuantiles que definen respectivamente las colas izquierda y derecha, obtenemos el *kernel* de precios con cambio de colas  $m_T^{ts}$  como

$$m_T^{ts} = \begin{cases} e^{\theta_3(q(\alpha)-x_T)} & \text{para } x_T \in (-\infty, q(\alpha)) \\ 1 & \text{para } x_T \in [q(\alpha), q(1-\alpha)] \\ e^{-\theta_3(x_T-q(1-\alpha))} & \text{para } x_T \in (q(1-\alpha), \infty) \end{cases} \quad (16)$$

donde  $\theta_3$  controla el sentido y la intensidad del cambio de cola. Cuando los precios de mercado incluyen un miedo excesivo a la cola izquierda, los inversores

---

9 Un SDF con pendiente descendente desplaza la masa de probabilidad de izquierda a derecha, lo que genera una transformación similar a una variación de media ascendente. Del mismo modo, un *kernel* de precios en forma de U desplaza la probabilidad de las colas al centro, lo que produce un movimiento de volatilidad que parece descendente. Sin embargo, para los distintos modelos utilizados en este estudio, no existe un SDF simple que pueda generar un desplazamiento de media-varianza habitual.

sobrevaloran los eventos de la cola izquierda en comparación con la cola derecha; por ello, una transformación de comportamiento  $\theta_3 > 0$  desplaza progresivamente la probabilidad de la cola izquierda a la derecha. Por el contrario, si el inversor muestra euforia con la cola derecha, un ajuste  $\theta_3 < 0$  aumenta la gravedad de la cola izquierda, reduciendo la cola derecha. La loglinealidad de  $m_T^{fs}$  garantiza que todas las probabilidades ajustadas a la cola continúan siendo positivas incluso para valores extremos del dominio de densidad.

### 2.3.3 Función de sentimiento y SDF del mundo real

La función de sentimiento  $\Psi(x_T)$  resume las correcciones de comportamiento necesarias para transformar los pronósticos ajustados al riesgo en densidades del mundo real. En términos de SDF, el efecto agregado del optimismo de los inversores, el exceso de confianza de los inversores y el sentimiento de cola se obtiene como:

$$\Psi(x_T) = m_T^{mv} m_T^{fs} \quad (17)$$

En consecuencia, el *kernel* de precios del mundo real  $m_T^{RW}$ , que refleja el impacto acumulado del sentimiento de los inversores y sus preferencias de riesgo, viene dado por:

$$m_T^{RW} = e^{-r\tau} u'(x_T) \Psi(x_T) \quad (18)$$

Intuitivamente, un SDF del mundo real de 1,2 para una rentabilidad *ex post*  $\tilde{x}_T$  indica que el pronóstico tradicional sobreestima la probabilidad de  $\tilde{x}_T$  por un factor de  $1,2/e^{-r\tau}$ . Más formalmente, siguiendo las ecuaciones (9) a (11), la densidad del mundo real se puede obtener a partir de una RND inicial  $f_t^Q$ , una utilidad marginal  $u'$  y una función de sentimiento  $\Psi$  como:

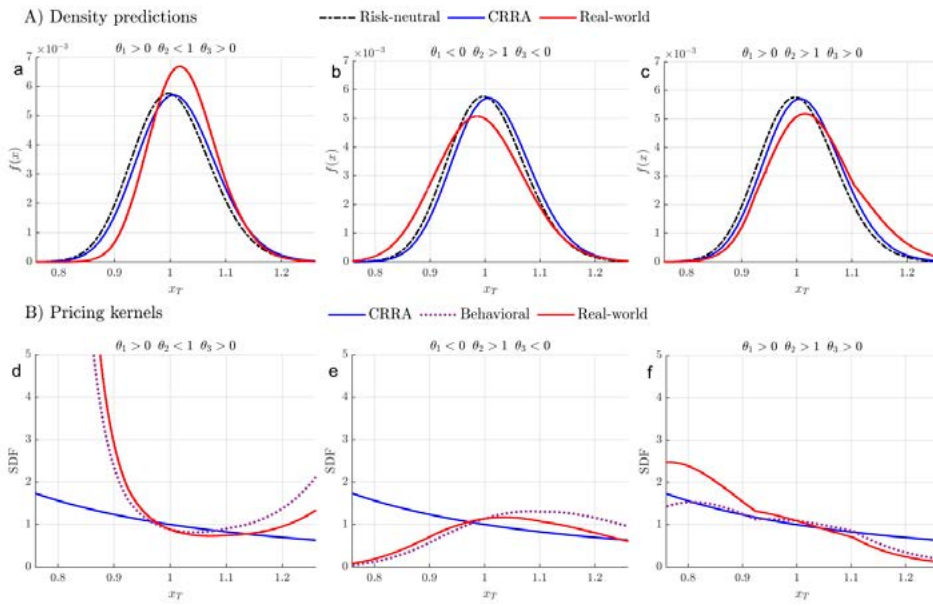
$$f_t^{RW}(x_T) = \frac{f_t^Q(x_T) / u'(x_T) \Psi(x_T)}{\int_0^\infty f_t^Q(y) / u'(y) \Psi(y) dy} \quad (19)$$

donde el factor de escala  $\int_0^\infty f_t^Q(y) / u'(y) \Psi(y) dy$  se utiliza para asegurar la integración a la unidad.

## 2.4 Ejemplo práctico

La función de sentimiento  $\Psi(x_T)$  proporciona una forma flexible de transformar las predicciones tradicionales en predicciones del mundo real. El gráfico 1 muestra tres densidades del mundo real que se han obtenido con diferentes calibraciones de la tupla de sentimiento  $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ . En todos los casos, la densidad inicial es lognormal y las preferencias de riesgo de los inversores se modelan a través de una utilidad CRRA con  $\gamma = 2$ .





Notas: Los gráficos 1.a a 1.c muestran la transformación de distribuciones neutras al riesgo a distribuciones ajustadas al riesgo y del mundo real. Los gráficos 1.d a 1.c muestran los *kernels* de precios utilizados en cada transformación. Las densidades de CRRA y del mundo real se obtienen dividiendo la RND respectivamente entre los *kernels* de precios de CRRA y del mundo real (excluyendo el factor de descuento  $e^{-r\tau}$ ). Alternativamente, las densidades del mundo real también pueden obtenerse dividiendo la densidad de CRRA entre el SDF de comportamiento. El *kernel* de CRRA es  $m_T^{CRRA} = e^{-r\tau} x_T^{-\gamma}$  y el *kernel* del mundo real es  $m_T^{RW} = e^{-r\tau} x_T^{-\gamma} \Psi(x_T)$ , donde  $\Psi(x_T)$  representa el SDF de comportamiento o la función de sentimiento. Los parámetros de sentimiento utilizados en la transformación  $\{\theta_1, \theta_2 \text{ y } \theta_3\}$  se indican encima de cada gráfico.

El gráfico 1.a muestra una caracterización que es representativa del miedo de los inversores. Los precios del mercado están determinados por inversores pesimistas y con poca confianza que sobrevaloran la cola izquierda. En consecuencia, nuestra corrección de sentimiento desplaza la masa de probabilidad hacia resultados más positivos ( $\theta_1 > 0$ ), reduce la volatilidad de la distribución ( $\theta_2 < 1$ ) y aumenta la cola derecha ( $\theta_3 > 0$ ), generando una densidad del mundo real que se concentra en torno a resultados más favorables.

Por el contrario, el gráfico 1.b presenta un pronóstico inicial que se caracteriza por la complacencia del inversor. Los precios de los activos vienen motivados por inversores optimistas y con exceso de confianza que asignan bajas probabilidades a la cola izquierda. En consecuencia, la densidad conductual se desplaza hacia la izquierda ( $\theta_1 < 0$ ), presenta una mayor dispersión general ( $\theta_2 > 1$ ) y muestra una cola izquierda incrementada ( $\theta_3 < 0$ ).

Por último, la distribución implícita en el mercado del gráfico 1.c está causada por una combinación de inversores optimistas y con exceso de confianza, que asignan demasiada probabilidad a la cola izquierda. Después de la corrección del sentimiento, la densidad del mundo real muestra una mayor dispersión ( $\theta_2 > 1$ ) y mayores probabilidades en el extremo derecho de la distribución ( $\theta_1 > 0$  y  $\theta_3 > 0$ ). Por el contrario, los efectos del exceso de confianza y el miedo a la cola izquierda se compensan parcialmente hacia el lado izquierdo, reduciendo el impacto del cambio de comportamiento.

Los *kernels* de precios utilizados en cada transformación se muestran en los gráficos 1.d a 1.f. En primer lugar, todos los pronósticos neutrales al riesgo se ajustan para incorporar las preferencias de riesgo de los inversores a través del *kernel* de CRRA. Intuitivamente, para valores SDF por encima (por debajo) de 1, la densidad inicial sobreestima (subestima) las probabilidades ajustadas al riesgo. Por lo tanto, el *kernel* de CRRA monótonamente decreciente desplaza la probabilidad hacia resultados más favorables, lo que genera una transformación que se asemeja a un cambio de media ascendente.

Las densidades ajustadas al riesgo se transforman en pronósticos del mundo real utilizando el SDF de comportamiento calculado a través de los parámetros calibrados  $\{\theta_1, \theta_2 \text{ y } \theta_3\}$ . En el gráfico 1.d, el exceso de confianza es el principal impulsor de la función de sentimiento en forma de U. Sin embargo, la pendiente del *kernel* de precios es mayor hacia el lado izquierdo. La asimetría puede explicarse por las correcciones por el pesimismo de los inversores y el miedo a la cola izquierda, que aleja la probabilidad de los resultados negativos, lo que desencadena un mayor aumento del SDF. Por el contrario, la corrección por exceso de confianza compensa parcialmente las ganancias derivadas del pesimismo de los inversores y el miedo a la cola izquierda hacia el lado derecho, lo que limita el aumento del *kernel* de precios.

En el gráfico 1.e, la falta de confianza de los inversores produce un SDF de comportamiento normalmente en forma de U invertida. En este caso, las correcciones por el optimismo y la euforia con la cola derecha desplazan la masa de probabilidad de resultados positivos a negativos, lo que conlleva una mayor disminución de SDF en la cola izquierda. El efecto combinado genera una función de sentimiento que se contrae rápidamente hacia el extremo izquierdo de la distribución, se mantiene por encima de 1 para resultados moderadamente positivos y vuelve a disminuir lentamente hacia la cola derecha.

Por último, en el gráfico 1.f, la combinación de pesimismo de los inversores, exceso de confianza y miedo a la cola izquierda genera una función de sentimiento oscilante que se asemeja al SDF de comportamiento en Shefrin (2008). El SDF de comportamiento es por regla general descendente, pero presenta una parte con pendiente ascendente cerca del centro de la distribución, lo que reproduce el rompecabezas del *kernel* de precios. El SDF decreciente está determinado por el pesimismo de los inversores y el miedo a la cola izquierda, que, en ambos casos, desplazan las probabilidades hacia precios más favorables. Por el contrario, la corrección por exceso de confianza reduce la probabilidad en el centro de la distribución, aumentando el *kernel* de precios en esta región y generando una sección con pendiente ascendente en la función de sentimiento.

### 3 Medición de los efectos del sentimiento

Un problema para los investigadores es que el sentimiento de los inversores no es directamente observable. Los efectos del sentimiento se manifiestan a través de los precios de los activos, pero no existe consenso sobre qué metodología y variables se deben usar para separar el sentimiento de las expectativas fundamentales. Entre las posibles opciones, nuestro enfoque para medir el sentimiento de los inversores es triple:

Primero, obtenemos nuestras aproximaciones al sentimiento directamente de la actividad del mercado. La razón subyacente es que es la actividad cotidiana de los participantes en el mercado la que afecta a los precios de los activos y genera sesgos en las expectativas del mercado. A diferencia de las encuestas a inversores o las redes sociales, los datos basados en el mercado se derivan de las decisiones tomadas por inversores activos que negocian en ese momento en los mercados. Además, el aumento de la negociación algorítmica da mayor relevancia al uso de datos basados en el mercado, ya que este tipo de negociación representa una parte del mercado cada vez mayor, aunque rara vez aparece en las encuestas o las redes sociales.

En segundo lugar, estimamos los efectos del comportamiento utilizando datos prospectivos que se actualizan a diario. Esto contrasta con el uso de aproximaciones que se calculan con una frecuencia baja o se publican con retraso durante el periodo de medición, por lo que presentan retardos y una capacidad limitada para capturar los cambios diarios en las creencias de los inversores.

En tercer lugar, la investigación empírica sugiere que los sesgos de comportamiento se manifiestan en los precios de los activos particularmente durante los periodos de alta confianza<sup>10</sup>. Las fases en las que el sentimiento se intensifica atraen a más agentes no informados, lo que aumenta la proporción de operaciones inducidas por el sentimiento y socava la eficiencia del mercado. Por lo tanto, en lugar de corregir las predicciones de densidad en todas las fechas posibles, nuestro marco vincula específicamente las anomalías en la fijación de precios con los periodos de alta confianza.

#### 3.1 Optimismo de los inversores

Nuestra aproximación para el optimismo de los inversores se deriva de la volatilidad implícita extraída de los precios de las opciones. Cuando los inversores son pesimistas sobre la rentabilidad futura, aumentan la demanda de valores de cobertura, lo

---

10 Al igual que Bondt *et al.* (2015), no afirmamos que la eficiencia del mercado esté rota, tan solo que puede romperse. Los estudios que vinculan periodos de alta confianza y anomalías en la fijación de precios incluyen, entre otros: Yu y Yuan (2011), Stambaugh *et al.* (2012), Shen *et al.* (2017), Lin *et al.* (2018).

que incrementa las volatilidades implícitas. Empíricamente, varios artículos muestran que la volatilidad implícita es un indicador contrario de los rendimientos promedios y concluyen que las volatilidades implícitas altas (bajas) predicen rentabilidades posteriores más bajas (más altas<sup>11</sup>). Además, Smales (2017) demuestra que, a la hora de explicar los rendimientos futuros, los cambios en la volatilidad implícita son preferibles a los niveles generales.

Para cada fecha de observación, calculamos la variación en la volatilidad implícita  $\Delta IV_t$  como la diferencia entre la volatilidad implícita actual  $IV_t$  y la volatilidad implícita media en los tres meses anteriores  $\overline{IV}_{t-1} = \sum_{s=1}^3 IV_{t-s} / 3$ , por lo que:

$$\Delta IV_t = IV_t - \overline{IV}_{t-1} \quad (20)$$

El conjunto de cambios de volatilidad disponible hasta la fecha  $t$   $\{\Delta IV_1, \dots, \Delta IV_{t-1}\}$  se transforma en una distribución continua a través de un *kernel* gaussiano con una ventana estimada con la fórmula de Silverman (1996). Cada nueva observación de  $\Delta IV_t$  se asigna a un cuantil  $\alpha_t^{IV}$  de la distribución empírica correspondiente. Las observaciones por debajo del cuantil 5 se asocian a un optimismo excesivo, mientras que las que superan el cuantil 95 están vinculadas a un pesimismo excesivo. El desplazamiento de la media conductual  $\theta_{1,t}$  se calibra como:

$$\theta_{1,t} = \begin{cases} (1 - e^{r_t \tau}) k_1 \frac{0,05 - \alpha_t^{IV}}{0,05} & \text{para } 0 < \alpha_t^{IV} < 0,05 \\ 0 & \text{para } 0,05 \leq \alpha_t^{IV} \leq 0,95 \\ -(1 - e^{r_t \tau}) k_1 \frac{\alpha_t^{IV} - 0,95}{0,05} & \text{para } 0,95 < \alpha_t^{IV} < 1 \end{cases} \quad (21)$$

Para medir cómo las diferentes calibraciones afectan a los pronósticos probabilísticos, probamos dos valores alternativos para  $k_1$ . En nuestra calibración de bajo impacto, el optimismo de los inversores puede llevar a un desplazamiento de la media de hasta una vez la tasa libre de riesgo ( $k_1 = 1$ ), mientras que en el caso de alto impacto el desplazamiento conductual es el doble ( $k_1 = 2$ ).

### 3.2 Exceso de confianza

El exceso de confianza es la tendencia a depositar un grado excesivo de confianza en las habilidades y creencias propias (Grinblatt y Keloharju, 2009). El exceso de confianza de los inversores se puede medir por aproximación mediante el volumen negociado en el mercado. El vínculo entre el exceso de confianza y los volúmenes de negociación está ampliamente aceptado en la literatura e indica que los inversores con exceso de confianza sobrevaloran la precisión de su información privada, con lo que subestiman la volatilidad futura y negocian en mayor medida de lo que sugieren los modelos racionales<sup>12</sup>.

11 Véanse, por ejemplo: Whaley (2009), Simon y Wiggins (2001), Giot (2009), Smales (2017).

12 Véanse, entre otros: De Bondt y Thaler (1995), Odean (1999), Barber y Odean (2001), Glaser y Weber (2007), Grinblatt y Keloharju (2009), Statman, Thorley y Vorkink (2006), Abreu y Mendes (2012) y Michailova y Schmidt (2016).

Del mismo modo que el optimismo de los inversores, Statman *et al.* (2006) consideran que, para medir el exceso de confianza, resultan preferibles los cambios en los volúmenes de negociación a los niveles generales. En cada fecha  $t$ , calculamos el cambio en el volumen negociado  $\Delta TV_t$  como la proporción del volumen del último mes  $TV_t$  con respecto al volumen medio de los tres meses anteriores  $\overline{TV}_{t-1} = \sum_{s=1}^3 TV_{t-s} / 3$ , de modo que<sup>13</sup>:

$$\Delta TV_t = TV_t / \overline{TV}_{t-1} \quad (22)$$

A continuación, el conjunto de cambios de volumen  $\{\Delta TV_1, \dots, \Delta TV_{t-1}\}$  se transforma en una distribución continua utilizando un estimador de densidad *kernel* (KDE, por sus siglas en inglés) gaussiano. El ajuste de volatilidad  $\theta_{2,t}$  se obtiene entonces como:

$$\theta_{2,t} = \begin{cases} k_2^{-1} \frac{0,05 - \alpha_t^{TV}}{0,05} & \text{para } 0 < \alpha_t^{TV} < 0,05 \\ 0 & \text{para } 0,05 \leq \alpha_t^{TV} \leq 0,95 \\ k_2 \frac{\alpha_t^{TV} - 0,95}{0,05} & \text{para } 0,95 < \alpha_t^{TV} < 1 \end{cases} \quad (23)$$

donde  $\alpha_t^{TV}$  representa la posición del cuantil en la distribución empírica. Las observaciones de  $\Delta TV_t$  por debajo del cuantil 5 de la distribución se consideran falta de confianza, mientras que las que superan el cuantil 95 se asocian a un exceso de confianza. En el escenario de bajo impacto  $k_2 = 1,2$  y, por tanto, el multiplicador de volatilidad  $\theta_{2,t}$  oscila entre 0,83 y 1,2, mientras que en el caso de alto sentimiento  $k_2 = 1,5$  y el ajuste de volatilidad varía de 0,67 a 1,5.

### 3.3 Sentimiento de cola

El sentimiento de cola está relacionado con la forma en que los inversores valoran y perciben el riesgo de cola. Dado que los participantes en el mercado suelen vivir con el temor a una caída de los precios, compran opciones de venta OTM (fuera del dinero) más allá de lo que sugieren los niveles racionales, lo que contribuye a un sobreprecio inducido por el sentimiento en las opciones de venta OTM<sup>14</sup>.

La cantidad de riesgo de cola valorada en el mercado puede inferirse de la asimetría de la distribución neutral al riesgo. Cuando los inversores perciben riesgos a la baja sustanciales, en la distribución neutral al riesgo aumenta la asimetría negativa. Por el contrario, cuando los inversores perciben que un activo ofrece altos rendimientos y riesgos limitados, su asimetría neutral al riesgo se vuelve positiva. En cada fecha  $t$ , obtenemos la asimetría de la RND a través del método sin modelo de Bakshi *et al.* (2003):

13 Habida cuenta del aumento estructural en los volúmenes de negociación durante el periodo de la muestra, derivamos nuestra aproximación del exceso de confianza de los cambios en los volúmenes a corto plazo, evitando así el impacto de las tendencias a largo plazo.

14 Véanse Bondarenko (2014), Schreindorfer (2014), Greenwood-Nimmo, Nguyen y Rafferty (2016) y Bollerslev y Todorov (2011). Cabe señalar que la percepción del inversor del riesgo de cola cambia con el tiempo y los participantes en el mercado también pueden subestimar los riesgos de cola izquierda.

$$Skew_t = \frac{e^{r\tau}W(t,T) - 3\mu(t,T)e^{r\tau}V(t,T) + 2\mu(t,T)^3}{(e^{r\tau}V(t,T) - \mu(t,T)^2)^{3/2}} \quad (24)$$

donde

$$\mu(t,T) = e^{r\tau} \left( 1 - e^{-r\tau} - \frac{1}{2}V(t,T) - \frac{1}{6}W(t,T) - \frac{1}{24}X(t,T) \right) \quad (25)$$

y  $V(t,T)$ ,  $W(t,T)$  y  $X(t,T)$  representan contratos hipotéticos con pagos cuadráticos, cúbicos y cuárticos, respectivamente, y se obtienen como se describe en Bakshi *et al.* (2003).

Siguiendo la evidencia empírica, examinamos si los niveles altos de asimetría pueden asociarse con sesgos en las expectativas de cola<sup>15</sup>. En concreto, consideramos que los sesgos de sentimiento están incorporados en los precios de los activos cuando  $Skew_t$  supera un umbral de  $\pm 1,5$ . Dado que las distribuciones de la renta variable suelen presentar asimetría negativa, se espera que esta elección genere sobreponderaciones más frecuentes de la cola izquierda en comparación con la derecha, lo que concuerda con la evidencia existente. El ajuste del desplazamiento de cola  $\theta_{3,t}$  se obtiene entonces como:

$$\theta_{3,t} = \begin{cases} k_3(Skew_t + 1,5) & \text{para } Skew_t < -1,5 \\ 0 & \text{para } -1,5 \leq Skew_t \leq 1,5 \\ k_3(Skew_t - 1,5) & \text{para } Skew_t > 1,5 \end{cases} \quad (26)$$

En nuestra calibración de bajo sentimiento, el aumento de  $\theta_{3,t}$  es lineal ( $k_3 = 1$ ), mientras que en el caso de alta confianza el aumento es el doble ( $k_3 = 2$ ).

---

15 Véanse Han (2008), Chen y Gan (2018) y Bevilacqua *et al.* (2018).

## 4 Datos y calibración

Nuestro proceso de selección de datos maximiza el uso de precios de mercado y minimiza los supuestos de modelización de datos de entrada, siguiendo así las recomendaciones de Christoffersen *et al.* (2013). Además, todos los parámetros del modelo se estiman estrictamente fuera de la muestra, utilizando solo la información conocida por los inversores hasta el momento  $t$ .

### 4.1 Datos de opciones

Nuestra base de datos está compuesta por opciones de estilo europeo con futuros del Ibex 35 subyacentes. Los precios de las opciones se obtienen del mercado oficial de derivados español (MEFF) entre noviembre de 1995 y diciembre de 2016, con lo que abarcan más de 21 años. Nuestro estudio se centra únicamente en los precios de opciones derivados del mercado. Esta elección contrasta con el uso de precios de liquidación comunicados por el mercado de valores, que en muchos casos se estiman teóricamente y no reflejan la actividad de negociación real<sup>16</sup>.

Para maximizar la representatividad de los datos y el tamaño de la muestra, trabajamos con contratos de opciones con el vencimiento más cercano; las opciones con vencimiento mensual son las más negociadas en el MEFF y maximizan el número de periodos no superpuestos<sup>17</sup>. Las fechas de observación se establecen 28 días naturales antes de cada fecha de vencimiento. En cada fecha  $t$ , registramos el precio de todas las opciones de compra y venta disponibles que presenten cotizaciones de oferta y demanda simultáneas. Dado que las opciones ITM (dentro del dinero) se negocian de forma menos activa que las opciones OTM (fuera del dinero), construimos nuestro conjunto de datos con opciones OTM y ATM (en el dinero). A fin de evaluar la consistencia de cada muestra transversal, las opciones de venta OTM se convierten en precios equivalentes de compra mediante la paridad compra-venta. Las opciones que no respetan las condiciones de no arbitraje se eliminan del conjunto de datos<sup>18</sup>.

---

16 Por ejemplo, los precios de liquidación diaria de las opciones del Ibex 35 son calculados teóricamente por MEFF asumiendo una relación lineal en la función de volatilidad implícita para las opciones OTM e ITM. Por lo tanto, estos precios de liquidación reflejan opciones de modelización específicas y su uso en la calibración implicaría introducir una forma de volatilidad derivada de manera exógena.

17 Las opciones del Ibex 35 no presentan vencimientos inferiores al mes. Por lo tanto, periodos consecutivos más cortos llevarían a horizontes de pronóstico que carecen de cotizaciones directas de mercado, lo que requeriría supuestos de extrapolación. Por otro lado, ciclos de vencimiento más largos implicarían reducir el número de periodos no superpuestos y depender de contratos para la segunda fecha de vencimiento más cercana, que son menos líquidos.

18 Los contratos equivalentes derivados de la opción de compra y venta cuyo precio no es una función convexa y decreciente del ejercicio se eliminan del conjunto de datos.

Después del filtrado, obtenemos 6659 precios de opciones distribuidos en 254 ciclos mensuales. El número medio de ejercicios en las muestras transversales es de 26, desde un mínimo de 8 hasta un máximo de 72. El cuadro 1 resume las estadísticas del conjunto de datos de opciones.

Por otra parte, el precio de liquidación final para cada futuro mensual se determina promediando los precios spot del Ibex 35 entre las 16:15 y las 16:45. Estos precios de liquidación constituyen el activo subyacente de las opciones y futuros del Ibex 35 utilizados en este estudio y, por tanto, se utilizan para evaluar la capacidad de previsión de cada modelo predictivo.

**Estadísticas resumidas para el conjunto de datos de opciones**

CUADRO 1

Tipo de opción	Número total	Promedio por día	Máximo por día	Mínimo por día
Compra	3.151	12	38	1
Venta	3.508	14	46	3
Global	6.659	26	72	8
Grado del dinero	F/K	N.º de opciones	(%)	
Venta muy fuera del dinero	> 1,10	1.755	26,36	
Venta fuera del dinero	1,03-1,10	1.423	21,37	
Cerca del dinero	0,97-1-03	1.496	22,47	
Compra fuera del dinero	0,90-0,97	1.541	23,14	
Compra muy fuera del dinero	< 0,90	444	6,67	

Notas: Se requiere un mínimo de 8 opciones para calibrar el modelo de Bates. Por lo tanto, en siete fechas de observación, complementamos las muestras transversales con contratos de opciones en el dinero cuyo último precio negociado coincidía con los precios de oferta y demanda simultáneos. Esto resultó en la suma de 9 opciones (0,1 % de la muestra)

## 4.2 Tipos de interés y dividendos

Entre enero de 1999 y diciembre de 2016, utilizamos el Euribor a 1 mes. En fechas anteriores, dado que el Euribor aún no estaba disponible, utilizamos el Mibor a 1 mes. Los tipos de interés efectivos se calculan para cada periodo de pronóstico utilizando la convención de cálculo de días act/360 correspondiente. El uso de contratos de futuros hace que la estimación de dividendos sea irrelevante; por lo tanto, las incertidumbres de los dividendos no afectan a nuestros pronósticos de densidad.

## 4.3 Datos de sentimiento

Nuestro marco de sentimiento evita los desajustes de información mediante el uso de datos prospectivos consistentes. En cada fecha  $t$ , el optimismo de los inversores y el sentimiento de cola se derivan de la muestra transversal de los precios de las opciones disponibles, lo que coincide con las expectativas incorporadas en las densidades implícitas en las opciones. De manera similar, el exceso de confianza se extrae de los cambios en los volúmenes negociados que se actualizan en cada fecha de pronóstico, lo que refleja las expectativas a futuro y las creencias actualizadas de los inversores.



Nuestra aproximación del optimismo de los inversores se deriva de las volatilidades ATM. En cada fecha mensual de diciembre de 1994 a 2016, la volatilidad ATM  $IV_t^{atm}$  se calcula por interpolación lineal de las dos opciones más cercanas al dinero en cada muestra transversal. A continuación, obtenemos el cambio respecto a los tres meses anteriores,  $\Delta IV_t^{atm}$ , que se emplea para estimar nuestra corrección de optimismo  $\theta_{1,t}$ .

Para estimar el exceso de confianza, se recogen los volúmenes de negociación en el Ibex 35 entre noviembre de 1994 y diciembre de 2016. Los volúmenes de negociación en cada fecha de pronóstico se calculan como el volumen acumulado durante los 20 días hábiles más recientes. La relación entre el volumen actual y el volumen medio de los tres meses anteriores  $\Delta TV_t$  se utiliza como aproximación del exceso de confianza y se emplea para calcular la corrección del exceso de confianza  $\theta_{2,t}$ <sup>19</sup>.

Por último, el sentimiento de cola se deriva de la asimetría de la RND implícita en los precios de las opciones. Para cada fecha de observación, obtenemos  $Skew_t$  a través del método sin modelo de Bakshi *et al.* (2003) y los niveles de asimetría se utilizan para calcular las correcciones de la cola conductual  $\theta_{3,t}$ .

#### 4.4 Calibración de densidades tradicionales

De acuerdo con los efectos del sentimiento, todas las densidades tradicionales se estiman estrictamente fuera de la muestra, utilizando la información disponible hasta la fecha  $t$ . Los pronósticos neutrales al riesgo se derivan de la muestra transversal de los precios de las opciones. Para el modelo BSM, las volatilidades ATM  $IV_t^{atm}$  y los tipos libres de riesgo  $r_t$  se utilizan para obtener las correspondientes densidades lognormales. Para los modelos de Heston, Bates y varianza gamma, estimamos el conjunto de parámetros  $\hat{\Theta}_t$  que minimiza la suma de errores relativos:

$$SRE_t = \sum_{i=1}^{N_t} \left| \frac{C_i - \hat{C}_i(\hat{\Theta}_t)}{C_i} \right| \quad (27)$$

donde  $N_t$  es el número de precios de opciones disponibles en la fecha  $t$ ,  $C_i$  el precio de mercado medio de cada opción en la muestra transversal y  $\hat{C}_i(\hat{\Theta}_t)$  es el valor dependiente del modelo obtenido con el conjunto de parámetros  $\hat{\Theta}_t$ <sup>20</sup>. Siguiendo este procedimiento, los parámetros neutrales al riesgo se estiman individualmente para cada modelo estocástico, por lo que se realizan 254 calibraciones por modelo. Para la aplicación de Malz de la fórmula de Breeden-Litzenberger, fijamos el tamaño

19 Dado que los volúmenes de negociación en agosto presentan una disminución cíclica que no está relacionada con la confianza de los inversores, ajustamos las cifras de agosto a través de la relación entre el volumen negociado en los últimos meses de agosto y el volumen de los tres meses anteriores.

20 El uso de errores relativos asigna un peso similar a todos los contratos de opciones, generando así resultados consistentes en diferentes regiones de ejercicio. Véanse Heston (1993), Bates (1996) y Madan *et al.* (1998) para obtener una descripción de los valores de parámetro admisibles. En el proceso de varianza gamma, también consideramos la restricción  $v^{-1} > \theta + \sigma^2 / 2$ , que evita problemas de calibración numérica (véanse Itkin, 2010 y Crisóstomo, 2017).

de paso para las diferencias finitas en  $\Delta = 0,01F_t$ , lo que evita probabilidades negativas en nuestros pronósticos de densidad.

En cuanto a las preferencias de riesgo, Cuesdeanu y Jackwerth (2018a) apuntan que las preferencias de los inversores son notoriamente difíciles de estimar; las estimaciones de la aversión al riesgo tienden a ser inestables y cambian ampliamente en periodos breves. Barone-Adesi *et al.* (2017) argumentan que este problema podría estar vinculado a la forma tradicional de estimar las preferencias de riesgo que, al ignorar el sentimiento, obliga a que los sesgos de los inversores se manifiesten a través del parámetro de aversión al riesgo.

Para obtener estimaciones consistentes de la aversión al riesgo, seguimos el enfoque prospectivo de Cuesdeanu y Jackwerth (2018b), que emplea una función de utilidad de potencia con coeficientes CRRA de 0, 2 y 4. Esta elección está respaldada por evidencia tanto empírica como teórica. Thomas (2016) considera que la familia de utilidades de potencia es la única clase de utilidad válida y se usa comúnmente en aplicaciones prácticas. Además, nuestros coeficientes CRRA se encuentran entre los más empleados en la literatura sobre pronóstico<sup>21</sup>. El epígrafe 6.6 amplía aún más estos análisis con una configuración de riesgo alternativa en la que la aversión al riesgo se estima de forma dinámica a partir de los precios de las opciones.

---

21 Véanse Bliss y Panigirtzoglou (2004), Meyer y Meyer (2005), Polkovnichenko y Zhao (2013), Barone-Adesi *et al.* (2017) y Brinkmann y Korn (2018).

## 5 Evaluación de pronósticos

Evaluamos la capacidad predictiva de todos los pronósticos de densidad utilizando tres criterios complementarios. Primero, analizamos la probabilidad logarítmica de cada densidad predictiva con la puntuación logarítmica. En segundo lugar, los errores de pronóstico se evalúan mediante la CRPS. En tercer lugar, la consistencia estadística se examina mediante las pruebas de bondad de ajuste de Berkowitz, Jarque-Bera y Kolmogorov-Smirnov. Finalmente, todos los modelos de densidad se clasifican en una escala estandarizada utilizando la IFS.

### 5.1 Puntuación logarítmica

La precisión de diferentes pronósticos probabilísticos puede compararse a través de la probabilidad de las realizaciones *ex post* evaluadas con las densidades *ex ante*. De acuerdo con Liu *et al.* (2007), Shackleton *et al.* (2010) y Høg y Tsiaras (2011), obtenemos la puntuación logarítmica para cada modelo de pronóstico como:

$$L = \sum_{t=1}^N \log(f_t(\tilde{x}_T)) \quad (28)$$

donde  $f_t$  denota el pronóstico de densidad calculado en el momento  $t$ ,  $\tilde{x}_T$  denota la realización *ex post* en  $T$  y  $N$  es el número de pronósticos que no se superponen. Al sumar las puntuaciones de toda la muestra, los modelos de pronóstico se pueden clasificar según su precisión fuera de la muestra. Además, Bao, Lee y Saltoğlu (2007) demuestran que, cuando es posible que todos los modelos estén mal especificados, como es el caso de los pronósticos financieros, el esquema predictivo con la mayor  $L$  está más cerca de la densidad de generación real conforme al criterio de información de Kullback-Leibler.

### 5.2 Puntuación de rango de probabilidad continuo

La CRPS evalúa toda la distribución predictiva, midiendo la distancia entre la realización *ex post* y todas las masas de probabilidad *ex ante* (Matheson y Winkler, 1976). Como resultado, la CRPS otorga buenas puntuaciones a las densidades que asignan altas probabilidades a valores cercanos pero no idénticos al que se materializa (Gneiting y Raftery, 2007), complementando el ángulo de precisión local proporcionado por la puntuación logarítmica.

Si denominamos  $CDF_t^m$  y  $CDF_t^r$  a las distribuciones acumuladas del modelo de pronóstico y la realización, la CRPS para una predicción probabilística es:

$$CRPS_t = \int_{-\infty}^{\infty} \left( CDF_t^m(x) - CDF_t^r(x) \right)^2 dx \quad (29)$$

donde:

$$CDF_t^r(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } \tilde{x}_T < x \\ 1 & \text{para } \tilde{x}_T \geq x \end{cases} \quad (30)$$

La CRPS tiene la dimensión del parámetro  $x$ , que entra en el cálculo a través de  $dx$ , facilitando la interpretación de la CRPS como una generalización del error absoluto medio (Hersbach, 2000). Para asegurar la comparabilidad entre diferentes periodos, calculamos la CRPS usando desviaciones de rendimientos en lugar de puntos de índice y la CRPS promedio para toda la muestra como:

$$CRPS = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (CDF_t^m(x) - CDF_t^r(x))^2 dx} \quad (31)$$

Para un modelo dado, una  $CRPS$  de 0,03 se puede interpretar como una desviación de rendimientos promedios del 3 % entre las realizaciones *ex post* y los resultados probabilísticos *ex ante*, lo que proporciona una métrica intuitiva para clasificar las predicciones de densidad.

### 5.3 Pruebas de bondad de ajuste

De acuerdo con Diebold *et al.* (1998), la consistencia estadística de un conjunto de pronósticos se puede evaluar mediante análisis basados en la transformación integral de probabilidad (PIT, por sus siglas en inglés). Para una fecha dada  $t$ , la PIT representa el cuantil de la distribución *ex ante* en la que se observa la realización *ex post*. Así,

$$PIT_t = \int_{-\infty}^{\tilde{x}_T} f_t(x) dx \quad (32)$$

En un modelo correctamente especificado, las realizaciones de cuantiles deberían ser indistinguibles de las extracciones aleatorias de las distribuciones predictivas. En consecuencia, la secuencia de valores de PIT debería converger en una distribución uniforme. Sin embargo, las pruebas basadas en variables uniformes no suelen ser lo suficientemente potentes para muestras pequeñas. Berkowitz (2001) modifica las realizaciones de PIT en una secuencia transformada  $T-PIT_t = \Phi^{-1}(PIT_t)$  que debería estar formada por  $N(0,1)$  variables independientes e idénticamente distribuidas si la densidad se especifica correctamente. La prueba de Berkowitz evalúa conjuntamente la media, la varianza y la independencia de la secuencia T-PIT:

$$T-PIT_t - \mu = \rho(T-PIT_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \quad (33)$$

a través de la prueba de relación de verosimilitud  $LR_3 = -2(L(0,1,0) - L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\rho}))$ , que compara la probabilidad de un modelo restringido [donde  $\mu = 0$ ,  $\text{var}(\varepsilon_t) = 1$  y  $\rho = 0$ ] con el de uno sin restricciones.

Sin embargo, como se indica en Dowd (2004), la prueba de Berkowitz no evalúa específicamente la normalidad de la secuencia T-PIT, por lo que no puede detectar fallos en momentos superiores. Para complementar la  $LR_3$ , empleamos las pruebas de Jarque-Bera (JB) y Kolmogorov-Smirnov (KS). La prueba KS analiza si la distancia

máxima entre la distribución T-PIT y una  $N(0,1)$  es estadísticamente significativa, mientras que la prueba JB evalúa específicamente la asimetría y la curtosis de las realizaciones de T-PIT.

#### 5.4 Puntuación de pronóstico integrado

Los resultados de la puntuación logarítmica, la CRPS y los análisis de bondad de ajuste proporcionan ángulos complementarios para evaluar los pronósticos probabilísticos. Sin embargo, como diferentes métricas pueden llevar a opciones de modelos divergentes, resumimos todas las medidas de pronóstico en una clasificación estandarizada utilizando la IFS (Crisóstomo y Couso, 2018).

Para calcular la IFS, primero obtenemos las puntuaciones  $[0, 1]$  normalizadas para la precisión local  $\bar{L}$ , errores globales  $CRPS$  y consistencia estadística  $Stat$ . Los dos primeros se derivan de la normalidad de las cifras globales de probabilidad logarítmica y CRPS. En concreto, dado que las cifras de la muestra completa se obtienen de una suma de 254 observaciones independientes y distribuidas de manera similar, deberían converger en una distribución normal. En consecuencia, obtenemos la media y la desviación típica de las cifras globales de probabilidad logarítmica y CRPS, y cada modelo se clasifica en una escala estandarizada  $[0, 1]$  según su posición de cuantil en la distribución correspondiente.

Con vistas a calcular la puntuación normalizada para la consistencia estadística, los modelos de pronóstico se clasifican primero por el número de pruebas superadas, asignando 0,25 puntos por cada prueba no rechazada con un nivel de significancia del 5 %. El 0,25 restante discrimina aún más entre los modelos competidores mediante los valores  $p$  concretos obtenidos en las pruebas de Berkowitz, JB y KS. Para cada prueba estadística, a los valores  $p$  más alto y más bajo se les asignan valores 0 y 1, mientras que otros valores  $p$  se clasifican mediante interpolación lineal.

Finalmente, la IFS para cada método predictivo se obtiene promediando las puntuaciones normalizadas:

$$IFS = (\bar{L} + CRPS + Stat) / 3 \quad (34)$$



## 6 Resultados empíricos

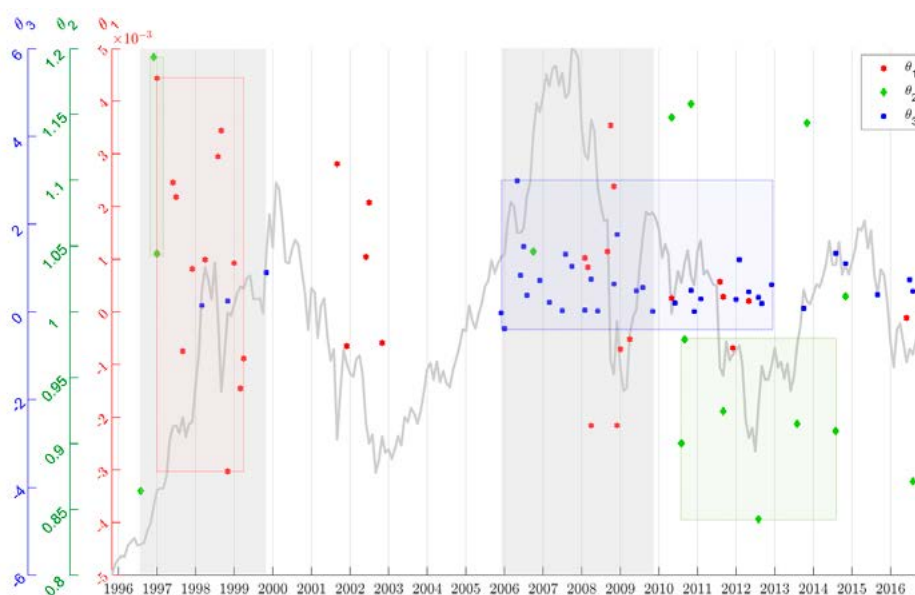
Esta sección analiza los ajustes de sentimiento obtenidos a través de nuestro marco de comportamiento y compara la evolución fuera de la muestra de todas las densidades neutras al riesgo, ajustadas al riesgo y del mundo real.

### 6.1 Ajustes de sentimiento

El gráfico 2 indica las fechas en las que se activaron nuestros ajustes de sentimiento y sus valores asociados. Para comprender mejor nuestras correcciones, el gráfico 2 también muestra la evolución del Ibx 35 durante el periodo muestral<sup>22</sup>.

Ajustes de sentimiento

GRÁFICO 2



Notas: Las áreas sombreadas indican una alta concentración de correcciones de sentimiento. Las áreas coloreadas indican una alta proporción de optimismo de los inversores ( $\theta_1$ ), exceso de confianza ( $\theta_2$ ) o ajustes de sentimiento de cola ( $\theta_3$ ).

Se pueden extraer tres observaciones principales del gráfico. Primero, nuestro marco de comportamiento identifica adecuadamente las fases empíricas que generalmente se asocian con periodos de sentimiento alto. El intervalo de diciembre de 2005 a noviembre de

22 Los valores indicados para  $\theta_{1,t}$ ,  $\theta_{2,t}$  y  $\theta_{3,t}$  se derivan de nuestra calibración de bajo sentimiento. Las cifras de sentimiento alto se pueden obtener mediante transformación lineal.

2009 contiene el 34 % de nuestras correcciones de sentimiento y coincide en gran medida con la escalada y la materialización de la crisis financiera global de 2007-08. Asimismo, el periodo de diciembre de 1996 a abril de 1999 abarca el 19 % de nuestros ajustes y puede estar asociado a la formación de la burbuja puntocom. En general, ambos periodos se consideran fases en las que comportamientos irracionales pueden haber generado anomalías en los precios, validando así nuestro marco de estimación.

En segundo lugar, los ajustes para cada dimensión de sentimiento también se concentran en periodos concretos. El intervalo de junio de 1997 a abril de 1999 reúne más del 34 % de nuestras correcciones de optimismo de los inversores. Los ajustes de comportamiento durante este periodo están motivados por fuertes aumentos en las volatilidades implícitas, lo que indica que, a pesar de los crecientes precios de los activos, los participantes en el mercado estaban preocupados por el aumento. Sin embargo, la burbuja de las puntocom también se caracteriza por varias disminuciones bruscas en las volatilidades implícitas, lo que indica confusión entre los inversores y cambios rápidos en el sentimiento de los inversores durante este periodo.

En términos de expectativas de cola, se observan tanto el miedo en la cola izquierda como la euforia en la cola derecha entre diciembre de 2005 y junio de 2008, delineando un periodo de sentimiento alto en el periodo previo a la crisis financiera global. En cambio, una vez que se materializó la crisis, todos los ajustes de cola se derivan del miedo excesivo a pérdidas sustanciales implícitas en los mercados de opciones (es decir, una elevada asimetría negativa). En cuanto a la confianza de los inversores, aunque las correcciones de comportamiento están menos concentradas a lo largo del tiempo, las fuertes disminuciones en los volúmenes de negociación generan una fase intermitente de falta de confianza de 2011 a 2014, mientras que varios aumentos en 1996 conducen a un breve periodo de exceso de confianza.

En tercer lugar, el gráfico 2 muestra que nuestros ajustes de sentimiento pueden cambiar rápidamente de valores positivos a negativos. Este resultado proviene de nuestro marco de estimación; dado que nuestras aproximaciones del comportamiento se derivan de datos prospectivos que se actualizan diariamente, nuestros ajustes rastrean los cambios diarios en el sentimiento de los inversores y pueden adaptarse a cambios rápidos de las expectativas de mercado.

El cuadro 2 muestra las estadísticas resumidas de nuestras aproximaciones de sentimiento. Para el optimismo de los inversores y el exceso de confianza, los cuantiles  $t$  5 y 95 de las series temporales  $\Delta IV_t$  y  $\Delta TV_t$  señalan los umbrales para activar nuestras correcciones conductuales. Por tanto, los incrementos mensuales de las volatilidades implícitas superiores a 10,6 puntos están vinculados a un pesimismo excesivo, mientras que las caídas por encima de los -9,4 puntos indican un optimismo excesivo. Del mismo modo, los aumentos en los volúmenes de negociación superiores al 51 % están asociados con el exceso de confianza, mientras que las caídas superiores al -32 % se vinculan a la falta de confianza<sup>23</sup>. En cuanto al sentimiento de cola, la mayoría de los valores  $Skew_t$  se concentran alrededor de valores negativos, lo que lleva a correcciones de comportamiento más grandes debido al miedo excesivo

---

23 Estas cifras deben entenderse como valores aproximados para toda la muestra. Los umbrales reales varían en el tiempo y se estiman *ex ante* con la información disponible hasta la fecha  $t$ .



de la cola izquierda en comparación con la euforia de la cola derecha. La correlación entre nuestras aproximaciones del sentimiento es notablemente baja, lo que indica que estas aproximaciones contienen información específica sobre ángulos complementarios del sentimiento de los inversores.

El cuadro 3 presenta el número de correcciones realizadas para cada dimensión de sentimiento. Los ajustes son de 32 para el optimismo de los inversores, 15 para el exceso de confianza y 39 para el sentimiento de cola. Sin embargo, como se pueden activar varias correcciones al mismo tiempo, realizamos transformaciones de densidad en 72 de las 254 observaciones mensuales (el 28 % de la muestra).

**Estadísticas resumidas para las aproximaciones del sentimiento**

CUADRO 2

Dimensión de sentimiento	Aproximación de mercado	Media	Desviación típica	Percentil 5	Percentil 95
Optimismo de los inversores	$\Delta IV_t$	0,000	0,072	-0,094	0,106
Confianza de los inversores	$\Delta TV_t$	1,036	0,252	0,676	1,515
Sentimiento de cola	$Skew_t$	-0,976	0,771	-2,227	-0,082

Correlación		
	$\Delta IV_t$	$\Delta TV_t$
$\Delta TV_t$	0,113	
$Skew_t$	0,130	0,058

**Correcciones de comportamiento por dimensión de sentimiento**

CUADRO 3

Dimensión de sentimiento	Ajuste	Activaciones mensuales	Pesimismo (optimismo)	Falta de confianza (exceso de confianza)	Miedo de la cola izquierda (euforia de la cola derecha)
Optimismo de los inversores	$\theta_{1,t}$	32	20 (12)		
Confianza de los inversores	$\theta_{2,t}$	15		8 (7)	
Sentimiento de cola	$\theta_{3,t}$	39			37 (2)

## 6.2 Puntuación de pronóstico integrado

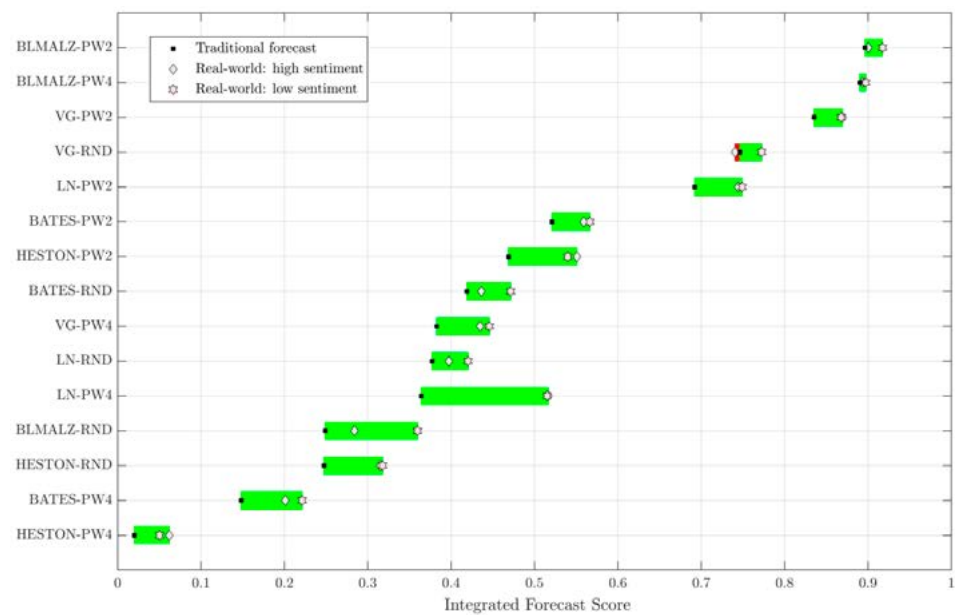
Ahora examinamos la capacidad predictiva de todos los modelos de pronóstico. El poder de pronóstico se mide mediante la IFS, que agrega en una clasificación [0, 1] estandarizada los resultados de puntuación logarítmica, CRPS y análisis de bondad de ajuste. Para cada modelo de densidad, el gráfico 3 indica la IFS de nuestros pronósticos del mundo real en comparación con la IFS de la variante tradicional correspondiente.

Los resultados muestran que los efectos del comportamiento se pueden utilizar de manera eficaz para pronosticar precios futuros. Para los 15 modelos subyacentes, la mejor predicción se obtiene siempre cuando el sentimiento se separa de las expectativas fundamentales. En general, el 97 % de nuestros pronósticos del mundo real superan al correspondiente modelo sin sentimiento. La mejora media de IFS es de +0,05, que es 8 veces más que la disminución observada en el único caso sin mejora.

Nuestras calibraciones de sentimiento alto y bajo arrojan ganancias sustanciales de pronóstico. Los ajustes de sentimiento bajo generan ganancias de información en los 15 modelos tradicionales, aumentando la IFS un 0,057 en promedio. De manera similar, nuestra corrección de sentimiento alto mejora en 14 de las 15 predicciones tradicionales, lo que lleva a una ganancia de IFS de 0,043. Los modelos estocásticos más simples (es decir, BSM y Heston) funcionan relativamente mejor con grandes correcciones de comportamiento, mientras que las dinámicas más sofisticadas mejoran más con ajustes más pequeños.

**Comparación IFS: densidades del mundo real frente a las tradicionales**

GRÁFICO 3



Notas: Las barras horizontales representan especificaciones de modelos alternativas. Los ajustes del mundo real que generan ganancias de pronóstico se resaltan en verde.

Antes del sentimiento, las densidades estimadas con supuestos de riesgo alternativos presentan evoluciones notablemente diferentes; distribuciones con preferencias de CRRA  $\gamma = 2$  generan la IFS general más alta (0,68 en promedio), seguidas por las RND (0,41) y las densidades de CRRA  $\gamma = 4$  (0,36). En particular, para todos los supuestos de riesgo posibles, nuestra corrección de comportamiento aumenta significativamente la capacidad predictiva de los modelos tradicionales correspondientes. Las mayores ganancias de información se observan en los modelos de CRRA  $\gamma = 4$  (+0,063 IFS incremental), lo que sugiere que los efectos del sentimiento pueden resultar especialmente útiles para corregir densidades posiblemente mal especificadas.

### 6.3 Comparaciones de probabilidad logarítmica

El cuadro 4 resume la precisión local lograda por nuestras densidades neutral al riesgo, ajustada al riesgo y del mundo real. Las cifras indicadas son la probabilidad logarítmica incremental de densidades de comportamiento en comparación con las variantes sin sentimiento. En general, la introducción de una corrección de sentimiento mejora la probabilidad logarítmica fuera de la muestra de los pronósticos tradicionales en 28 de nuestras 30 densidades del mundo real, generando un aumento promedio de +1,05<sup>24</sup>.

Las ganancias de pronóstico son robustas en todas las preferencias de riesgo, modelos subyacentes y calibraciones de sentimiento. Por preferencias de riesgo, las ganancias de probabilidad logarítmica se sitúan en 0,87 para RND, 0,97 para CRRA  $\gamma = 2$  y 1,31 para densidades CRRA  $\gamma = 4$ . En cuanto a los efectos del sentimiento, nuestra calibración de bajo impacto supera a la gran corrección (1,12 frente a 0,97). No obstante, las mayores ganancias de precisión se observan a través de la corrección de sentimiento alto de las densidades CRRA  $\gamma = 4$  (1,37), lo que indica nuevamente que los efectos conductuales pueden corregir las preferencias de riesgo posiblemente mal especificadas.

#### Probabilidad logarítmica

CUADRO 4

Modelo subyacente	Pronóstico tradicional	Densidades del mundo real	
	Sin sentimiento	Sentimiento bajo	Sentimiento alto
<b>Neutral al riesgo</b>			
LN-RND	-1815,19	0,76	0,44
HESTON-RND	-1817,36	1,27	1,29
BATES-RND	-1819,50	1,02	0,91
VG-RND	-1812,85	0,85	0,51
BLMALZ-RND	-1816,47	1,48	0,14
<b>CRRA <math>\gamma = 2</math></b>			
LN-PW2	-1813,73	1,12	1,01
HESTON-PW2	-1816,21	1,36	1,61
BATES-PW2	-1819,13	1,14	1,29
VG-PW2	-1811,41	0,86	0,77
BLMALZ-PW2	-1810,54	0,74	-0,22
<b>CRRA <math>\gamma = 4</math></b>			
LN-PW4	-1817,13	1,75	1,81
HESTON-PW4	-1820,78	1,74	2,17
BATES-PW4	-1823,44	1,48	1,82
VG-PW4	-1814,51	1,05	1,09
BLMALZ-PW4	-1810,15	0,24	-0,04

Notas: Las cifras de probabilidad logarítmica para todas las densidades del mundo real se calculan como el valor en exceso del pronóstico tradicional correspondiente.

Entre los pronósticos tradicionales, las densidades BLMALZ ajustadas al riesgo presentan la mayor precisión, por lo que requieren correcciones generales más bajas.

24 Cabe señalar que las ganancias de probabilidad logarítmica provienen de los ajustes de comportamiento en solo 72 de las 254 fechas mensuales, mientras que la probabilidad logarítmica general se deriva de las cifras de la muestra al completo.

En particular, incluso para los modelos tradicionales más precisos, esta calibración de sentimiento bajo ofrece ganancias de información significativas, lo que aumenta las probabilidades logarítmicas fuera de la muestra en un promedio de 0,49.

## 6.4 Comparaciones de CRPS

El cuadro 5 indica los errores de pronóstico de todos los esquemas predictivos. Nuestros resultados muestran que un simple ajuste de comportamiento mejora significativamente la CRPS de los pronósticos tradicionales.

La reducción de errores es robusta en todos los modelos subyacentes, preferencias de riesgo y calibraciones de sentimiento. Por la dinámica subyacente, la mayor disminución de CRPS se observa en el modelo de Heston (-0,0136 en promedio) mientras que la mejora más pequeña corresponde al proceso VG (-0,0026). En cuanto a las preferencias de riesgo, la reducción de CRPS es más alta para las densidades de CRRA  $\gamma = 4$  (-0,0159) seguidas de las RND (-0,0072) y las densidades de CRRA  $\gamma = 2$  (-0,0054). Nuestra calibración de sentimiento bajo reduce los errores globales en -0,0111, mientras que la corrección de sentimiento alto genera una disminución promedio de -0,0078.

**Puntuación de rango de probabilidad continuo**

CUADRO 5

Modelo subyacente	Pronóstico tradicional	Densidades del mundo real	
	Sin sentimiento	Sentimiento bajo	Sentimiento alto
<b>Neutral al riesgo</b>			
LN-RND	3,480	-0,0047	-0,0012
HESTON-RND	3,498	-0,0101	-0,0006
BATES-RND	3,455	-0,0100	-0,0036
VG-RND	3,452	-0,0001	0,0068
BLMALZ-RND	3,523	-0,0280	-0,0165
<b>CRRA <math>\gamma = 2</math></b>			
LN-PW2	3,435	-0,0101	-0,0093
HESTON-PW2	3,473	-0,0049	-0,0052
BATES-PW2	3,430	-0,0099	-0,0036
VG-PW2	3,440	-0,0045	-0,0057
BLMALZ-PW2	3,410	-0,0023	0,0018
<b>CRRA <math>\gamma = 4</math></b>			
LN-PW4	3,489	-0,0265	-0,0260
HESTON-PW4	3,581	-0,0223	-0,0300
BATES-PW4	3,503	-0,0245	-0,0171
VG-PW4	3,494	-0,0084	-0,0038
BLMALZ-PW4	3,421	-0,0008	0,0005

Notas: Las cifras de CRPS para todas las densidades del mundo real se calculan como el valor en exceso del pronóstico tradicional correspondiente.

Las mejoras de CRPS van acordes en general con las ganancias de probabilidad logarítmica. La similitud se debe a las distribuciones típicamente en forma de montaña que caracterizan a los modelos de renta variable. En esas distribuciones, las realizaciones

*ex post* situadas cerca del pico de la montaña aumentan la probabilidad logarítmica, al tiempo que reducen la distancia a otras masas de probabilidad, mejorando tanto la puntuación logarítmica como la CRPS. Sin embargo, esta relación se ve particularmente afectada por momentos más altos. Por ejemplo, el modelo de Heston logra mejores puntuaciones logarítmicas pero peor CRPS que el modelo de Bates, que puede explicarse por las distribuciones con mayor asimetría negativa que suelen observarse en nuestros pronósticos de densidad de Bates.

## 6.5 Consistencia estadística

El cuadro 6 resume la consistencia estadística de nuestras densidades tradicionales y del mundo real. Las cifras indicadas son los valores  $p$  incrementales de las densidades de comportamiento en comparación con las variantes sin sentimiento. Nuestros resultados muestran que las densidades del mundo real proporcionan mejores pronósticos de la distribución de las realizaciones *ex post* que las predicciones neutrales al riesgo y ajustadas al riesgo.

Para la prueba LR3 de Berkowitz, la tasa de mejora es del 77 %, con un aumento medio del valor  $p$  de 0,011 en todos los modelos subyacentes. De manera similar, más del 80 % y el 83 % de nuestras densidades del mundo real generan mejoras en las pruebas JB y KS, aumentando los valores  $p$  en 0,034 y 0,021, respectivamente.

### Pruebas de bondad de ajuste

CUADRO 6

Modelo	Pronóstico tradicional			Sentimiento bajo			Sentimiento alto		
	LR3	JB	KS	LR3	JB	KS	LR3	JB	KS
<b>Risk-neutral</b>									
LN-RND	0,175	0,001	0,016	-0,007	0,000	0,000	-0,008	0,000	0,000
HESTON-RND	0,090	0,001	0,008	0,009	0,000	0,004	0,013	0,000	0,004
BATES-RND	0,172	0,002	0,148	-0,025	-0,001	0,049	-0,024	-0,001	0,044
VG-RND	0,200	0,622	0,096	0,006	0,057	0,000	0,002	0,058	-0,026
BLMALZ-RND	0,002	0,533	0,008	0,000	0,112	0,002	0,000	0,110	0,002
<b>CRRA <math>\gamma = 2</math></b>									
LN-PW2	0,600	0,001	0,684	0,060	0,000	-0,120	0,078	0,000	-0,135
HESTON-PW2	0,274	0,001	0,683	0,045	0,000	0,086	0,056	0,000	0,088
BATES-PW2	0,229	0,002	0,987	-0,025	-0,001	0,006	-0,013	-0,001	0,000
VG-PW2	0,506	0,631	0,291	0,006	0,065	0,077	0,008	0,065	0,077
BLMALZ-PW2	0,158	0,469	0,492	0,036	0,056	0,131	0,048	0,085	0,147
<b>CRRA <math>\gamma = 4</math></b>									
LN-PW4	0,054	0,001	0,157	0,030	0,000	0,116	0,036	0,000	0,139
HESTON-PW4	0,009	0,001	0,012	0,004	0,000	0,004	0,005	0,000	0,006
BATES-PW4	0,007	0,002	0,104	0,000	-0,001	0,030	0,001	-0,001	0,041
VG-PW4	0,037	0,646	0,009	0,005	0,053	0,001	0,005	0,071	0,004
BLMALZ-PW4	0,256	0,477	0,489	-0,019	0,138	-0,076	0,002	0,163	-0,076

Notas: Los valores  $p$  para todas las densidades del mundo real se calculan como el valor en exceso del pronóstico tradicional correspondiente.

La consistencia incremental es robusta en todas las clasificaciones de modelos. Por categoría de riesgo, la combinación de una aversión al riesgo moderada y efectos de sentimiento alto ofrecen la mejor evolución general. Por modelo subyacente, las ganancias más destacadas se observan en el modelo de Heston, donde todas las pruebas de bondad de ajuste presentan mejoras estadísticas. Por el contrario, los valores  $p$  de LR3 y JB muestran disminuciones en el modelo de Bates. Esto puede explicarse por una realización *ex post* en septiembre de 2001 que se vuelve más extrema a través de nuestra corrección de sentimiento, afectando la consistencia del T-PIT debido a consideraciones de muestra pequeña. En cambio, cuando se mide la consistencia estadística con la prueba KS, todas nuestras densidades del mundo real mejoran los valores  $p$  correspondientes en todas las especificaciones de Bates.

En particular, nuestra calibración de sentimiento alto supera el ajuste de sentimiento bajo en todas las pruebas de bondad de ajuste. Esto contrasta con la mejor evolución de la calibración más baja tanto en probabilidad logarítmica como en CRPS, lo que demuestra que diferentes métricas pueden conducir a opciones de modelos divergentes y destaca la importancia de considerar tanto la precisión como la consistencia en las evaluaciones de pronóstico de densidad.

## 6.6 Análisis de robustez

En esta sección se realizan dos análisis adicionales. En primer lugar, comparamos la capacidad predictiva de nuestros ajustes de sentimiento con los pronósticos no paramétricos que se recalibran para evitar errores pasados. En segundo lugar, exploramos la evolución de nuestras transformaciones de comportamiento cuando se aplican a densidades tradicionales donde se estima una aversión al riesgo implícita a partir de los precios de las opciones.

### 6.6.1 Recalibración estadística

Los sesgos históricos observados en las predicciones de densidad se pueden corregir mediante una recalibración del pronóstico actual a la luz de errores pasados. De acuerdo con Fackler y King (1990), Shackleton *et al.* (2010) y de Vincent-Humphreys y Noss (2012), calculamos la función de calibración empírica  $\hat{c}_t$  a partir de la diferencia entre la secuencia  $T-PIT_t$  de cada densidad tradicional y la  $T-PIT_t$  de un modelo perfectamente especificado:

$$\hat{c}_t(z_t) = \hat{h}_t(z_t) / \phi(z_t) \quad (35)$$

donde  $z_t = \Phi^{-1}(T-PIT_t)$ ,  $\hat{h}_t$  representa un KDE normal y  $\phi$  denota la función de densidad de probabilidad de una variable normal estándar. Para cada fecha  $t$ , la distribución recalibrada  $f^{RC}$  se estima a partir de la densidad ajustada al riesgo  $f^{RA}$  como:

$$f^{RC}(x_T) = f^{RA}(x_T) \hat{c}_t(z_t) \quad (36)$$

Por construcción, la función de calibración refleja todos los sesgos PIT observados en predicciones pasadas, lo que corrige las preferencias de riesgo y los errores

inducidos por el sentimiento. Como consecuencia, para comparar adecuadamente la evolución de nuestro marco de comportamiento con recalibraciones estadísticas, recalibramos las densidades tradicionales en las fechas en las que se realizan las correcciones de sentimiento.

El cuadro 7 muestra que nuestras densidades del mundo real superan a las densidades recalibradas para evitar errores pasados, lo que genera un aumento promedio de la IFS de un 0,05, en comparación con el -0,02 en las recalibraciones estadísticas. Sin embargo, la comparación muestra diferencias notables entre los supuestos de preferencia de riesgo. Cuando el pronóstico tradicional es neutral al riesgo, las recalibraciones estadísticas brindan mayores ganancias de información que nuestras correcciones de sentimiento. Este resultado se puede atribuir al tipo de sesgos que se corrigen mediante la recalibración; dado que las RND carecen tanto de preferencias de riesgo como de efectos de sentimiento, corregir simultáneamente ambos genera mayores ganancias de IFS que solo corregir errores de comportamiento.

**Comparación IFS: densidades recalibradas frente a densidades del mundo real** CUADRO 7

Modelo subyacente	Pronóstico tradicional	Densidad recalibrada	Densidades del mundo real	
			Sentimiento bajo	Sentimiento alto
<b>Neutral al riesgo</b>				
LN-RND	0,377	0,14	0,04	0,02
HESTON-RND	0,247	0,13	0,07	0,07
BATES-RND	0,419	-0,03	0,05	0,02
VG-RND	0,746	-0,14	0,03	-0,01
BLMALZ-RND	0,249	0,34	0,11	0,05
<b>CRRA <math>\gamma = 2</math></b>				
LN-PW2	0,692	-0,06	0,06	0,05
HESTON-PW2	0,469	-0,06	0,07	0,08
BATES-PW2	0,521	-0,12	0,05	0,04
VG-PW2	0,835	-0,17	0,03	0,03
BLMALZ-PW2	0,896	-0,08	0,02	0,00
<b>CRRA <math>\gamma = 4</math></b>				
LN-PW4	0,364	-0,01	0,15	0,15
HESTON-PW4	0,020	0,01	0,03	0,04
BATES-PW4	0,148	-0,03	0,07	0,05
VG-PW4	0,383	-0,05	0,06	0,05
BLMALZ-PW4	0,890	-0,19	0,01	0,00

Notas: Las cifras de IFS para todas las densidades recalibradas y del mundo real se calculan como el valor en exceso del pronóstico tradicional correspondiente.

Por el contrario, cuando el pronóstico inicial ya es ajustado al riesgo, nuestro marco de sentimiento ofrece mayores ganancias que las recalibraciones estadísticas, lo que demuestra que los ajustes conductuales prospectivos funcionan mejor que las correcciones basadas en errores pasados. Otros análisis confirman que, si bien la prueba estadística generalmente mejora, las recalibraciones basadas en PIT no generan

ganancias de probabilidad logarítmica o de CRPS (-0,89 en probabilidad logarítmica; +0,014 en CRPS<sup>25</sup>), lo que respalda la evaluación de pronósticos de densidad por medio de medidas compuestas que resuman tanto la precisión como la consistencia estadística.

### 6.6.2 Densidades con preferencias de riesgo implícitas en opciones

De acuerdo con Bakshi y Madan (2006) y Kang *et al.* (2010), la aversión al riesgo relativa implícita en la opción (IRRA) en la fecha  $t$  puede obtenerse de la diferencia entre la varianza neutral al riesgo y la varianza física. En particular, cuando el inversor representativo presenta una función de utilidad de potencia, el coeficiente IRRA  $\gamma_t$  se puede extraer de la ecuación:

$$\frac{\sigma_{p,t}^2(\tau) - \sigma_{q,t}^2(\tau)}{\sigma_{q,t}^2(\tau)} \approx \gamma_t \sigma_{q,t}(\tau) \xi_{q,t}(\tau) + \frac{\gamma_t^2}{2} \sigma_{q,t}^2(\tau) (\kappa_{q,t}(\tau) - 3) \quad (37)$$

donde  $\sigma_{q,t}^2$ ,  $\xi_{q,t}$  y  $\kappa_{q,t}$  son la varianza, la asimetría y la curtosis de la distribución neutral al riesgo, y  $\sigma_{p,t}^2(\tau)$  es la varianza física calculada a partir de los últimos 30 días de negociación. Todos los momentos neutrales al riesgo se obtienen utilizando fórmulas de Bakshi *et al.* (2003).

En lugar de emplear momentos históricos, la ecuación (38) usa la asimetría y la curtosis prospectivas, generando estimaciones de IRRA que son consistentes con nuestras densidades implícitas en las opciones. Para cada fecha  $t$ , obtenemos  $\gamma_t$  minimizando la función objetivo:

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_{p,t}^2(\tau) - \sigma_{q,t}^2(\tau)}{\sigma_{q,t}^2(\tau)} - \gamma_t \sigma_{q,t}(\tau) \xi_{q,t}(\tau) - \frac{\gamma_t^2}{2} \sigma_{q,t}^2(\tau) (\kappa_{q,t}(\tau) - 3) \quad (38)$$

Dados los problemas para obtener estimaciones fiables de IRRA, restringimos el rango de valores  $\gamma_t$  aceptables de -1 a 6. Esta elección genera una flexibilidad adicional en comparación con nuestro rango inicial de  $\gamma$  (0, 2 y 4), evitando al mismo tiempo oscilaciones extremas y valores de IRRA económicamente inverosímiles.

El cuadro 8 muestra que nuestras densidades del mundo real mejoran constantemente el poder predictivo de los pronósticos obtenidos con IRRA. Cuando se estiman las densidades del mundo real con efectos de sentimiento bajo, nuestra corrección de comportamiento mejora la IFS de todos los modelos tradicionales, generando una ganancia de IFS promedio de 0,04. De manera similar, cuando se emplean efectos de sentimiento alto, 4 de cada 5 correcciones de comportamiento mejoran las variantes correspondientes sin sentimiento.

---

25 Los aumentos promedio de valor p son de 0,18, 0,04 y 0,12 para las pruebas LR3, JB y KS, respectivamente.



**Comparación IFS: densidades con preferencias de riesgo implícitas en opciones**

CUADRO 8

Modelo subyacente	Pronóstico tradicional	Densidades del mundo real	
	Sin sentimiento	Sentimiento bajo	Sentimiento alto
<b>IRRA variable en el tiempo</b>			
LN-IRRA	0,56	0,11	0,07
HESTON-IRRA	0,29	0,08	0,06
BATES-IRRA	0,43	0,03	0,02
VG-IRRA	0,78	0,00	-0,03
BLMALZ-IRRA	0,82	0,06	0,01

Notas: Las cifras de IFS para densidades del mundo real se calculan como el valor en exceso del pronóstico tradicional correspondiente.

Las ganancias de información están motivadas por mejoras tanto en la precisión como en la consistencia estadística. La probabilidad logarítmica incremental se sitúa en +0,94, la reducción de CRPS es de -0,005 y el aumento medio del valor  $p$  en todas las pruebas estadísticas es de +0,03, lo que demuestra que nuestros pronósticos del mundo real también mejoran los modelos neoclásicos en los que se obtiene una aversión al riesgo variable en el tiempo a partir de los precios de las opciones.



## 7 Conclusión

Este documento examina si el sentimiento de los inversores se puede utilizar para mejorar la capacidad de pronóstico de las predicciones de densidad obtenidas de los precios de las opciones. Cada vez hay una mayor evidencia de que los inversores del mundo real cometen errores de comportamiento sistemáticos que se manifiestan en los precios de los activos. En consecuencia, se deduce que los pronósticos implícitos en el mercado deben corregirse adecuadamente para separar el impacto de los sesgos de comportamiento de las expectativas fundamentales.

Para cuantificar los efectos del sentimiento, desarrollamos un marco prospectivo que genera la corrección de comportamiento necesaria para ajustar los pronósticos tradicionales en áreas específicas de la distribución de rendimientos. Para 15 modelos subyacentes y combinaciones de riesgo-preferencia, mostramos que una simple transformación de comportamiento en las estimaciones de media, varianza y cola de las predicciones tradicionales mejora significativamente su precisión y consistencia estadística.

Las ganancias de información son robustas en todas las métricas de pronóstico y calibraciones de sentimiento, lo que demuestra que los efectos del comportamiento se pueden usar de manera efectiva para predecir los precios de los activos. Nuestros resultados también demuestran que las densidades del mundo real superan a las correcciones no paramétricas derivadas de errores pasados y además mejoran los modelos de pronóstico en los que la aversión al riesgo se estima de forma dinámica a partir de los precios de las opciones.



## 8 Referencias

- Abreu, M. y Mendes, V. (2012). «Information, overconfidence and trading: Do the sources of information matter?». *Journal of Economic Psychology*.
- Aït-Sahalia, Y. y Lo, A. W. (2000). «Nonparametric risk management and implied risk aversion». *Journal of Econometrics*, Vol. 94, pp. 9–51.
- Alonso, F., Blanco, R. y Rubio, G. (2009). «Option-implied preferences adjustments, density forecasts, and the equity risk premium». *Spanish Economic Review*.
- Baker, M. y Wurgler, J. (2006). «Investor sentiment and the cross-section of stock returns». *Journal of Finance*, Vol. 61, pp. 1.645–1.680.
- Baker, M. y Wurgler, J. (2007). «Investor sentiment in the stock market». *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 21.
- Bakshi, G., Kapadia, N. y Madan, D. (2003). «Stock return characteristics, skew laws, and the differential pricing of individual equity options». *Review of Financial Studies*, Vol. 16, pp. 101–143.
- Bakshi, G. y Madan, D. B. (2006). «A theory of volatility spreads». *Management Science*, Vol. 52, pp. 1.945–1.956.
- Bakshi, G. y Madan, D. B. (2000). «Spanning and derivative-security valuation». *Journal of Financial Economics*, Vol. 55, pp. 205–238.
- Bao, Y., Lee, T. H. y Saltoğlu, B. (2007). «Comparing density forecast models». *Journal of Forecasting*, Vol. 26, pp. 203–225.
- Barber, B. M. y Odean, T. (2001). «Boys will be boys: Gender, overconfidence, and common stock investment». *Quarterly Journal of Economics*.
- Barone-Adesi, G., Legnazzi, C. y Sala, C. (2018). *S&P 500 Index, an option-implied risk analysis*. Swiss Finance Institute, Research Paper Series n.º 18-29.
- Barone-Adesi, G., Mancini, L. y Shefrin, H. (2017). «Estimating sentiment, risk aversion, and time preference from behavioral pricing kernel theory»: Online Appendix. *SSRN Electronic Journal*.
- Bates, D. S. (1996). «Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in Deutsche Mark options». *Review of Financial Studies*, Vol. 9, pp. 69–107.

- Beare, B. K. (2011). «Measure preserving derivatives and the pricing kernel puzzle». *Journal of Mathematical Economics*.
- Beare, B. K. y Schmidt, L. D. W. (2016). «An empirical test of pricing kernel monotonicity». *Journal of Applied Econometrics*.
- Berkowitz, J. (2001). «Testing density forecasts, with applications to risk management». *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 19, pp. 465–474.
- Bevilacqua, M., Hasan, I. y Tunaru, R. (2018). «The SKEW Index: Extracting what has been left». *SSRN Electronic Journal*.
- Bliss, R. R. y Panigirtzoglou, N. (2004). «Option-implied risk aversion estimates». *Journal of Finance*, Vol. 59, pp. 407–446.
- Bollen, N.P.B. y Whaley, R. E. (2004). «Does net buying pressure affect the shape of implied volatility functions?». *Journal of Finance*, Vol. 59, pp. 711–753.
- Bollerslev, T. y Todorov, V. (2011). «Tails, fears, and risk premia». *Journal of Finance*.
- Bondarenko, O. (2014). «Why are put options so expensive?». *Quarterly Journal of Finance*.
- Bondt, W., Muradoglu, Y., Shefrin, H. y Staikouras, S. (2015). «Behavioral finance: Quo vadis?». *Journal of Applied Finance*, Vol. 18, pp. 1–15.
- Breeden, D. T. y Litzenberger, R. H. (1978). «Prices of state-contingent claims implicit in option prices». *The Journal of Business*, Vol. 51, pp. 621–651.
- Brinkmann, F. y Korn, O. (2018). «Risk-adjusted option-implied moments». *Review of Derivatives Research*.
- Brown, D. P. y Jackwerth, J. C. (2012). «The pricing kernel puzzle: Reconciling index option data and economic theory». *Contemporary Studies in Economic and Financial Analysis*.
- Carr, P. y Wu, L. (2003). «The finite moment logstable process and option pricing». *The Journal of Finance*, Vol. 58, pp. 753–778.
- Chen, B. y Gan, Q. (2018). «Sentiment, implied volatility slope, and risk-neutral skewness». *SSRN Electronic Journal*.
- Christoffersen, P., Jacobs, K. y Chang, B. Y. (2013). «Forecasting with option-implied information». *Handbook of Economic Forecasting*, Vol. 2, pp. 581–656.
- Cochrane, J. H. (2005). *Asset Pricing* (edición revisada). Princeton University Press.
- Constantinides, G. M., Jackwerth, J. C. y Perrakis, S. (2009). «Mispricing of S&P 500 index options». *Review of Financial Studies*, Vol. 22, pp. 1.247–1.277.

- Crisóstomo, R. (2014). *An Analysis of the Heston Stochastic Volatility Model: Implementation and Calibration using Matlab*. CNMV, Documento de trabajo n.º 58.
- Crisóstomo, R. (2017). «Speed and biases of Fourier-based pricing choices: A numerical analysis». *International Journal of Computer Mathematics*, Vol. 95, pp. 1.565–1.582.
- Crisóstomo, R. y Couso, L. (2018). «Financial density forecasts: A comprehensive comparison of risk-neutral and historical schemes». *Journal of Forecasting*, Vol. 37, pp. 1–25.
- Cuesdeanu, H. y Jackwerth, J. C. (2018a). «The pricing kernel puzzle: Survey and outlook». *Annals of Finance*, Vol. 14, pp. 289–329.
- Cuesdeanu, H. y Jackwerth, J. C. (2018b). «The pricing kernel puzzle in forward looking data». *Review of Derivatives Research*.
- Da, Z., Engelberg, J. y Gao, P. (2015). «The sum of all FEARS investor sentiment and asset prices». *Review of Financial Studies*.
- De Bondt, W. F. M. y Thaler, R. H. (1995). «Financial decision-making in markets and firms: A behavioral perspective». *Handbooks in Operations Research and Management Science*.
- De Long, J. B., Shleifer, A., Summers, L. H. y Waldmann, R. J. (1990). «Noise trader risk in financial markets». *Journal of Political Economy*, Vol. 98, pp. 703–738.
- De Vincent-Humphreys, R. y Noss, J. (2012). *Estimating probability distributions of future asset prices: empirical transformations from option-implied risk-neutral to real-world density functions*. Bank of England, Working Papers n.º 455.
- DeMiguel, V., Plyakha, Y., Uppal, R. y Vilkov, G. (2013). «Improving portfolio selection using option-implied volatility and skewness». *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 48, pp. 1.813–1.845.
- Diebold, F. X., Gunther, T. y Tay, A. (1998). «Evaluating density forecasts with applications to financial risk management». *International Economic Review*, Vol. 39, pp. 863–883.
- Dowd, K. (2004). «A modified Berkowitz back-test». *Risk magazine*, Vol. 17, pp. 86–87.
- Fackler, P. L. y King, R. P. (1990). «Calibration of option-based probability assessments in agricultural commodity markets». *American Journal of Agricultural Economics*.
- Figlewski, S. (2018). «Risk-neutral densities: A review». *Annual Review of Financial Economics*, Vol. 10, pp. 329–359.
- Giot, P. (2009). «Relationships between implied volatility indexes and stock index returns». *The Journal of Portfolio Management*.

- Glaser, M. y Weber, M. (2007). «Overconfidence and trading volume». *GENEVA Risk and Insurance Review*.
- Gneiting, T. y Raftery, A. E. (2007). «Strictly proper scoring rules, prediction, and estimation». *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 102, pp. 359–378.
- Greenwood-Nimmo, M., Nguyen, V. H. y Rafferty, B. (2016). «Risk and return spillovers among the G10 currencies». *Journal of Financial Markets*.
- Grinblatt, M. y Keloharju, M. (2009). «Sensation seeking, overconfidence, and trading activity». *Journal of Finance*.
- Grith, M., Härdle, W. K. y Krätschmer, V. (2017). «Reference-dependent preferences and the empirical pricing kernel puzzle». *Review of Finance*.
- Han, B. (2008). «Investor sentiment and option prices». *Review of Financial Studies*, Vol. 21, pp. 387–414.
- Hersbach, H. (2000). «Decomposition of the continuous ranked probability score for ensemble prediction systems». *Weather and Forecasting*, Vol. 15, pp. 559–570.
- Heston, S. (1993). «A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options». *The Review of Financial Studies*, Vol. 6, pp. 327–343.
- Høg, E. y Tsiaras, L. (2011). «Density forecasts of crude-oil prices using option-implied and ARCH-type models». *Journal of Futures Markets*, Vol. 31, pp. 727–754.
- Itkin, A. (2010). *Pricing options with VG model using FFT*. arXiv Working Paper.
- Jackwerth, J. C. (2000). «Recovering probabilities and risk aversion from options prices and realized returns». *The Review of Financial Studies*, Vol. 13, pp. 1–34.
- Kang, B. J. y Kim, T. S. (2006). «Option-implied risk preferences: An extension to wider classes of utility functions». *Journal of Financial Markets*.
- Kang, B. J., Kim, T. S. y Yoon, S. J. (2010). «Information content of volatility spreads». *Journal of Futures Markets*, Vol. 30, pp. 533–558.
- Keynes, J. M. (1936). *The General Theory of Employment, Interest, and Money*. Macmillan Cambridge University Press.
- Kostakis, A., Panigirtzoglou, N. y Skiadopoulos, G. S. (2011). «Market timing with option-implied distributions: A forward-looking approach». *Management Science*, Vol. 57, pp. 1.231–1.249.
- Lin, C. B., Chou, R. K. y Wang, G. H. K. (2018). «Investor sentiment and price discovery: Evidence from the pricing dynamics between the futures and spot markets». *Journal of Banking and Finance*, Vol. 90, pp. 17–31.



- Linn, M., Shive, S. y Shumway, T. (2018). «Pricing kernel monotonicity and conditional information». *Review of Financial Studies*.
- Liu, X., Shackleton, M. B., Taylor, S. J. y Xu, X. (2007). «Closed-form transformations from risk-neutral to real-world distributions». *Journal of Banking and Finance*, Vol. 31, pp. 1.501–1.520.
- Madan, D. B., Carr, P. P. y Chang, E. C. (1998). «The variance gamma process and option pricing». *Review of Finance*, Vol. 2, pp. 79–105.
- Malz, A. M. (2014). *A Simple and Reliable Way to Compute Option-Based Risk-Neutral Distributions*. Federal Reserve Bank of New York, Staff Reports n.º 677.
- Matheson, J. E. y Winkler, R. L. (1976). «Scoring rules for continuous probability distributions». *Management Science*, Vol. 22, pp. 1.087–1.096.
- Meyer, D. J. y Meyer, J. (2005). «Relative risk aversion: What do we know?». *Journal of Risk and Uncertainty*.
- Michailova, J. y Schmidt, U. (2016). «Overconfidence and bubbles in experimental asset markets». *Journal of Behavioral Finance*.
- Odean, T. (1999). «Do investors trade too much?». *American Economic Review*.
- Polkovnichenko, V. y Zhao, F. (2013). «Probability weighting functions implied in options prices». *Journal of Financial Economics*, Vol. 107.
- Poon, S. H. y Granger, C. (2003). «Forecasting financial market volatility: A review». *Journal of Economic Literature*, Vol. 41, pp. 478–539.
- Rosenberg, J. V. y Engle, R. F. (2002). «Empirical pricing kernels». *Journal of Financial Economics*, Vol. 64, pp. 341–372.
- Sala, C., Barone-Adesi, G. y Mira, A. (2016). «The impact of misalignment of beliefs on the estimation of the pricing kernel». *SSRN Electronic Journal*.
- Schreindorfer, D. (2014). «Tails, fears, and equilibrium option prices». *SSRN Electronic Journal*.
- Shackleton, M. B., Taylor, S. J. y Yu, P. (2010). «A multi-horizon comparison of density forecasts for the S&P 500 using index returns and option prices». *Journal of Banking and Finance*, Vol. 34, pp. 2.678–2.693.
- Shefrin, H. (2008). *A Behavioral Approach to Asset Pricing* (Second edition). Academic Press.
- Shen, J., Yu, J. y Zhao, S. (2017). «Investor sentiment and economic forces». *Journal of Monetary Economics*.
- Silverman, B. W. (1996). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*.

- Simon, D. P. y Wiggins, R. A. (2001). «S&P futures returns and contrary sentiment indicators». *Journal of Futures Markets*.
- Smales, L. A. (2017). «The importance of fear: investor sentiment and stock market returns». *Applied Economics*.
- Stambaugh, R. F., Yu, J. y Yuan, Y. (2012). «The short of it: Investor sentiment and anomalies». *Journal of Financial Economics*, Vol. 104, pp. 288–302.
- Statman, M., Thorley, S. y Vorkink, K. (2006). «Investor overconfidence and trading volume». *Review of Financial Studies*.
- Thomas, P. J. (2016). «Measuring risk-aversion: The challenge». *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, Vol. 79, pp. 285–301.
- Whaley, R. E. (2009). «The investor fear gauge». *The Journal of Portfolio Management*.
- Yan, H. (2010). «Is noise trading cancelled out by aggregation?». *Management Science*, Vol. 56, pp. 1.047–1.059.
- Yatchew, A. y Härdle, W. (2006). «Nonparametric state price density estimation using constrained least squares and the bootstrap». *Journal of Econometrics*.
- Yu, J. y Yuan, Y. (2011). «Investor sentiment and the mean-variance relation». *Journal of Financial Economics*, Vol. 100, pp. 367–381.



